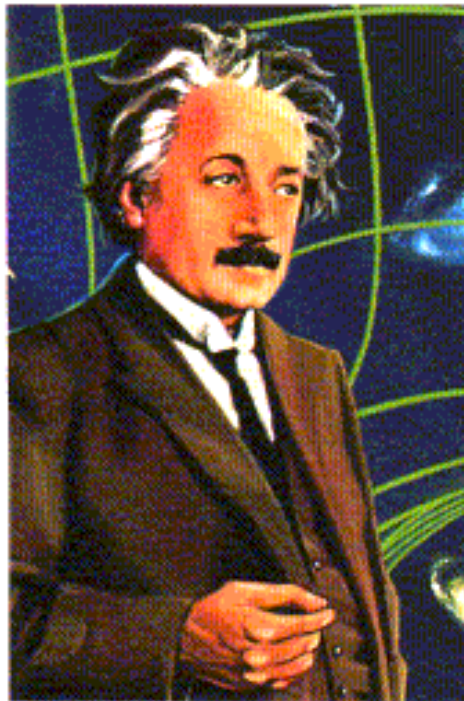


Si ce n'est toi, c'est donc ton frère!

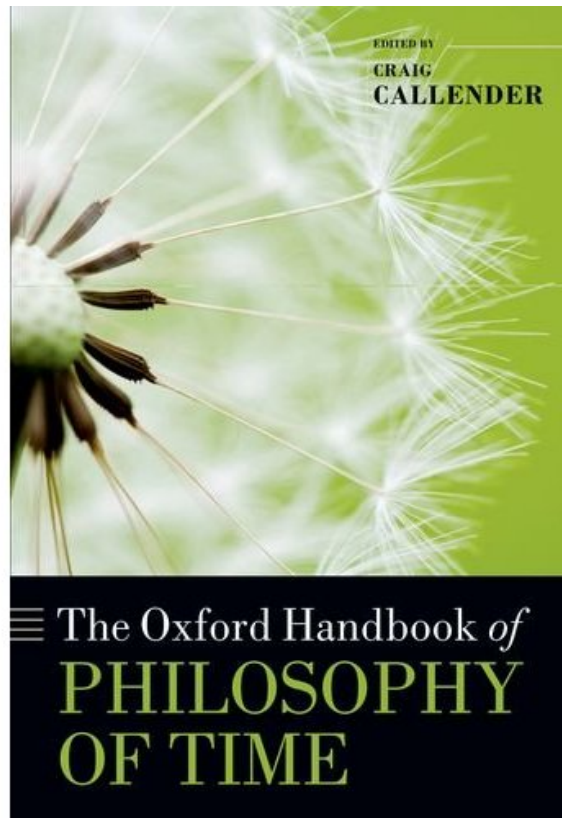
Jean-Pierre Luminet



Si ce n'est toi, c'est donc ton frère!

Jean-Pierre Luminet

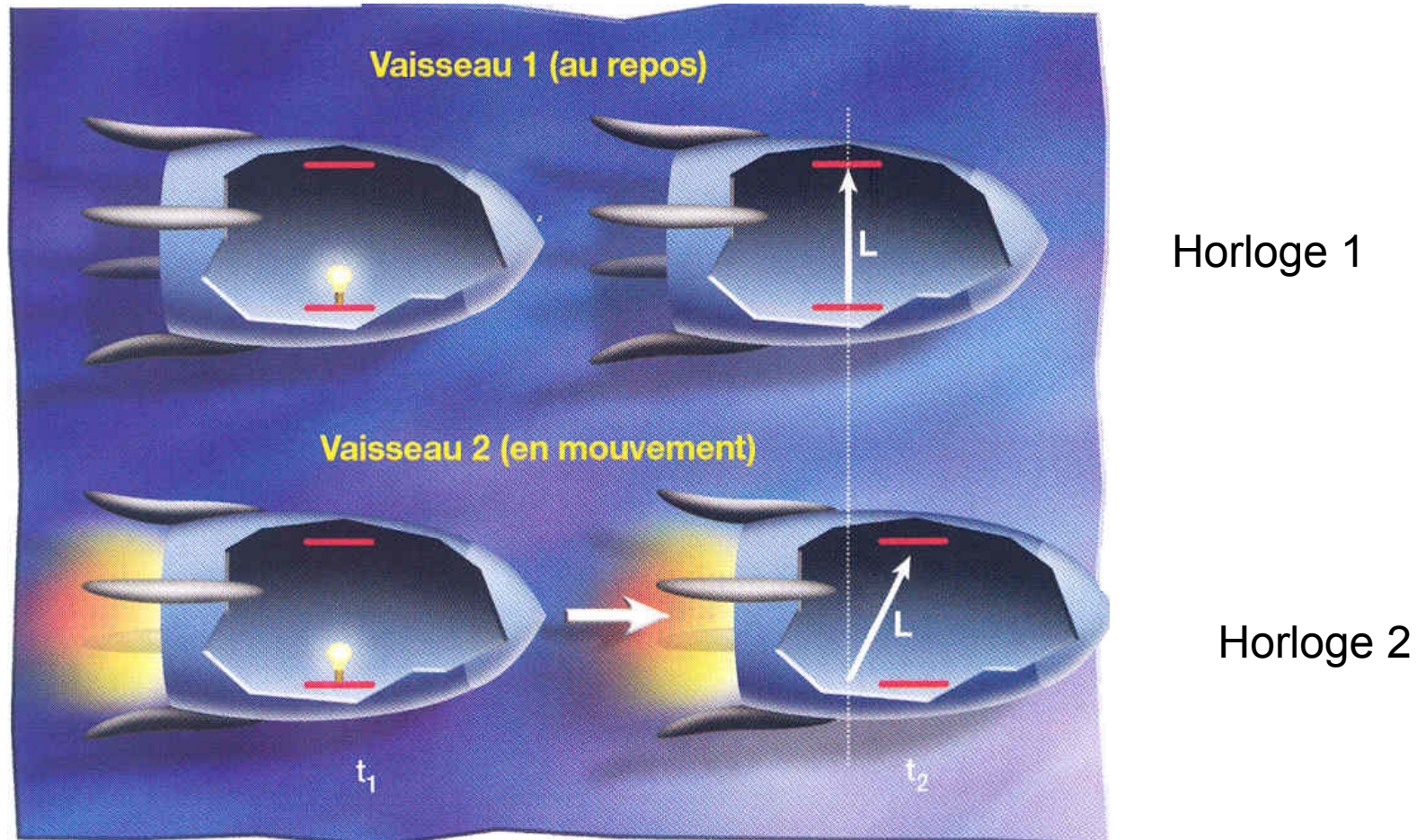
Time, Topology and the twin Paradox



CUP 2011
p.528-545

arXiv:0910.5847

Symétrie des référentiels inertiels en R. R.



**Horloge 1 voit Horloge 2 retarder de $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$
ET RECIPROQUEMENT**

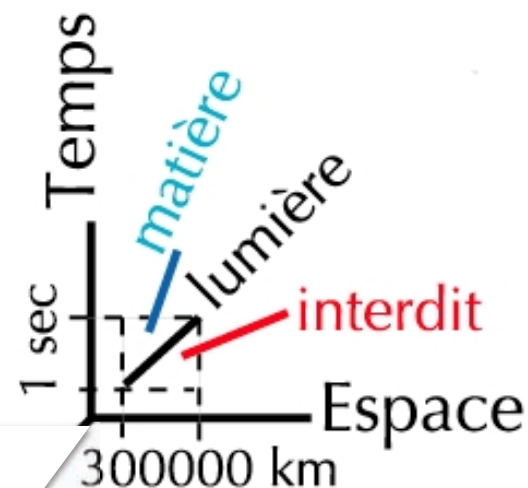
Histoire des jumeaux Sédentaire et Voyageur

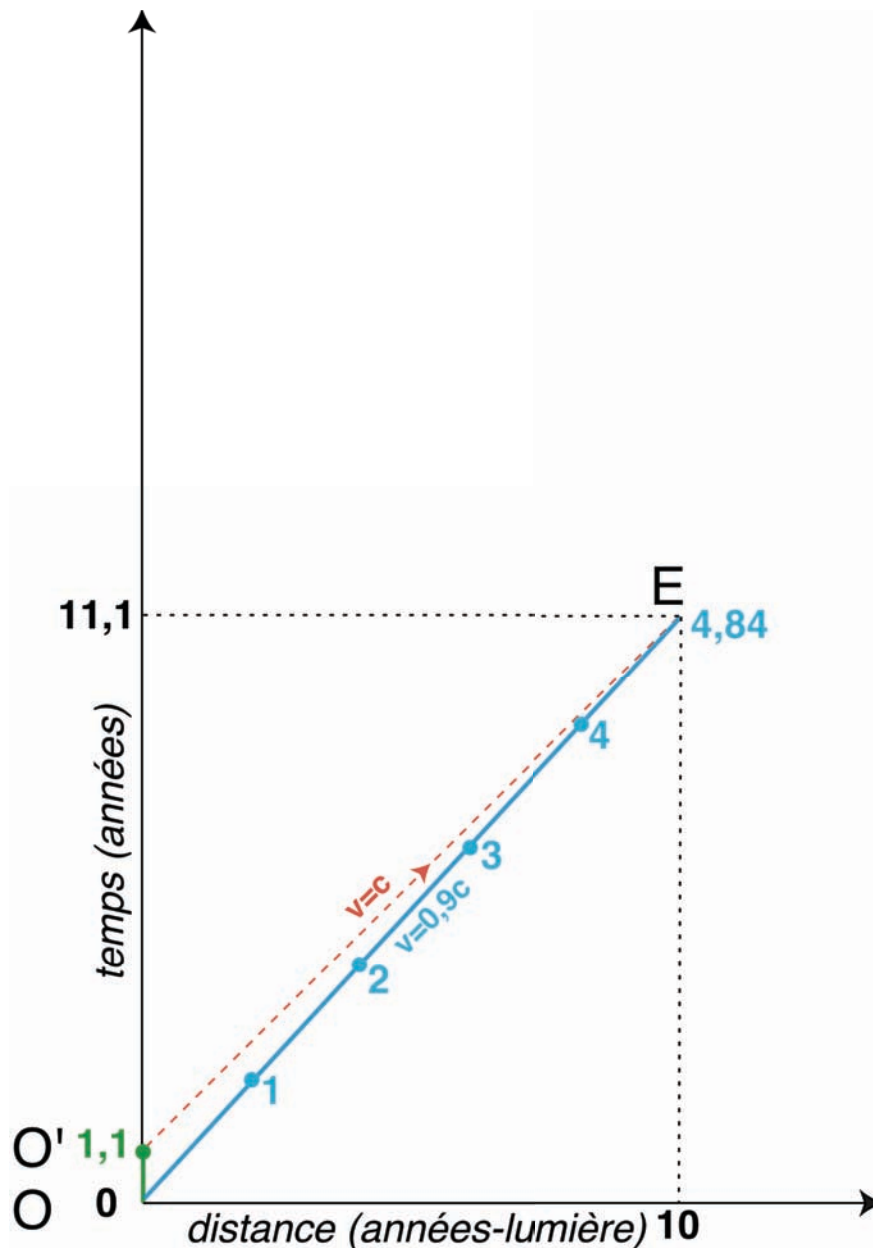
Sédentaire reste sur Terre, tandis que Voyageur part vers une étoile E située à 10 années-lumière en voyageant à 90 % de la vitesse de la lumière c , soit environ 270 000 km/s, puis revient sur Terre à la même vitesse.

Le coefficient de dilatation du temps vaut

$$\sqrt{1 - 0,92} = 0,436$$

Diagramme d'espace-temps

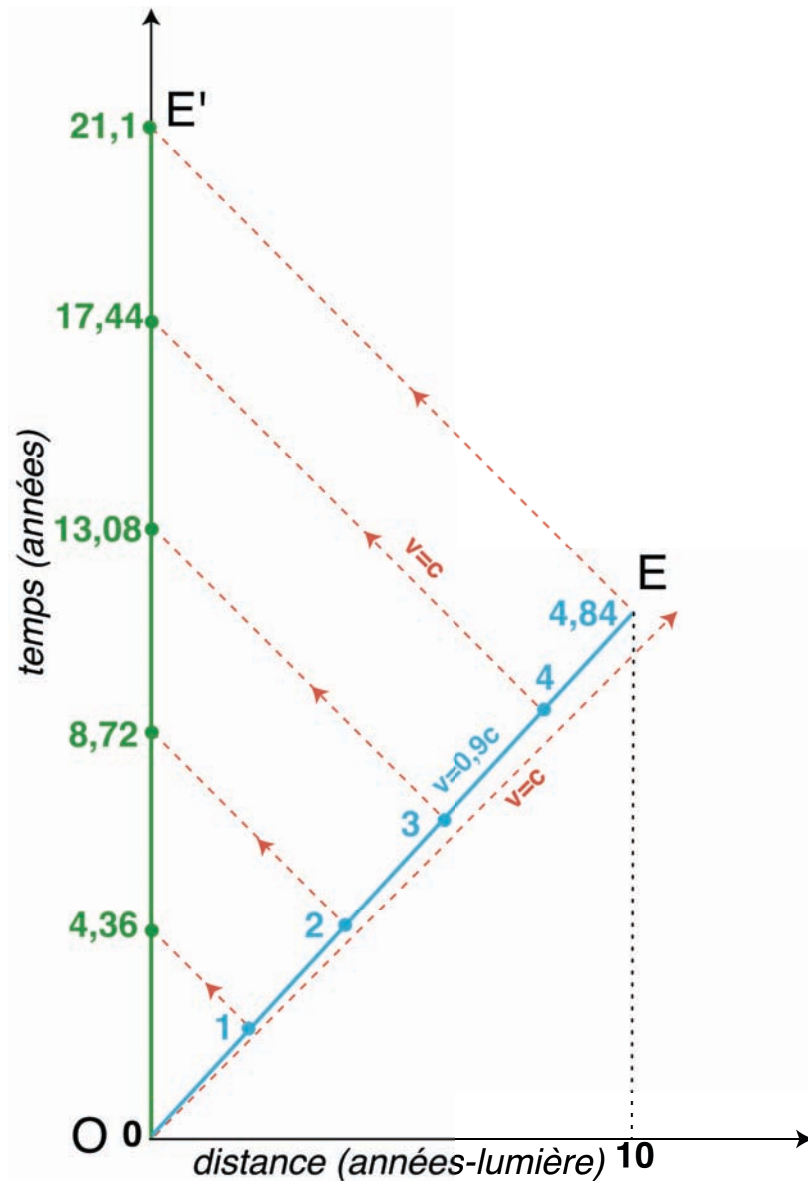




Aller : ce que mesure Voyageur

- « En principe », il faut 11,1 ans pour parcourir 10 a.l. à la vitesse de $0,9 c$.
- D'après son horloge, Voyageur parvient en E au bout de seulement 4,84 années ($11,1 \times 0,436$).
- Arrivé en E, Voyageur voit la Terre telle qu'elle était en O', c'est-à-dire 1,1 année après son départ à l'horloge de Sédentaire.

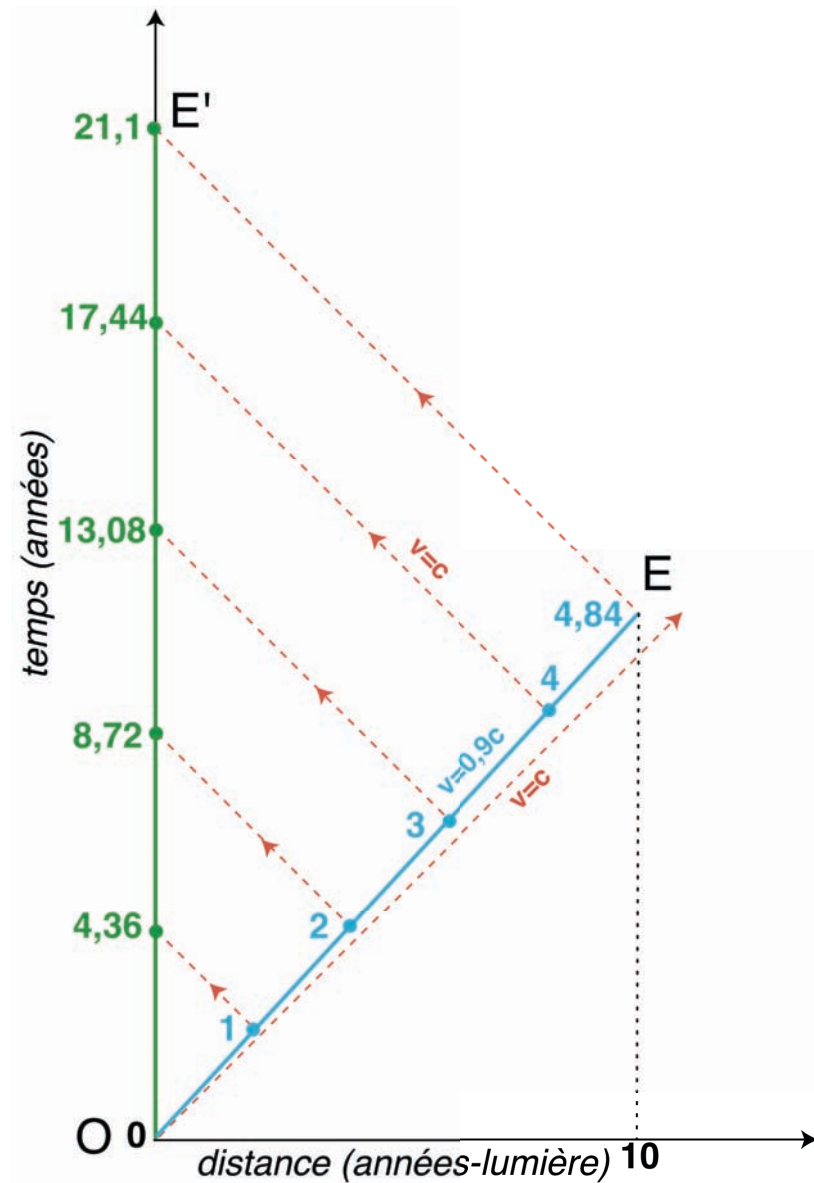
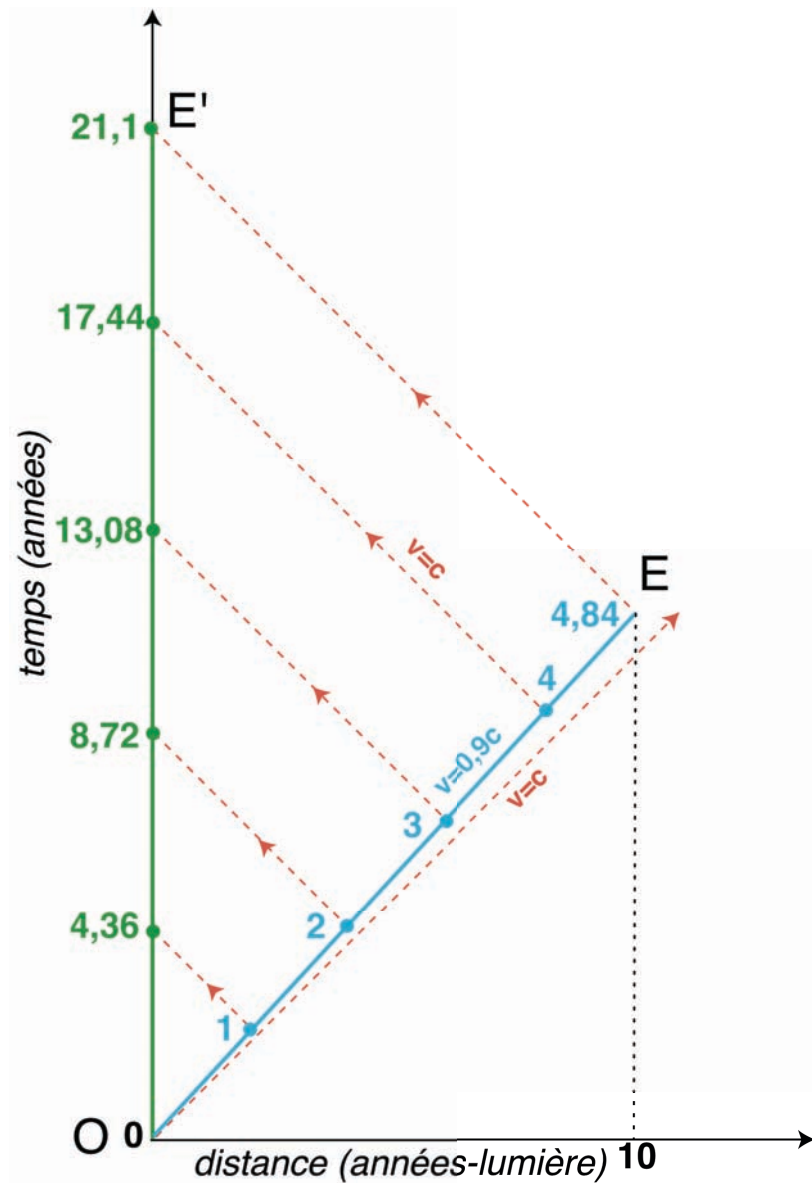
Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus lentement.



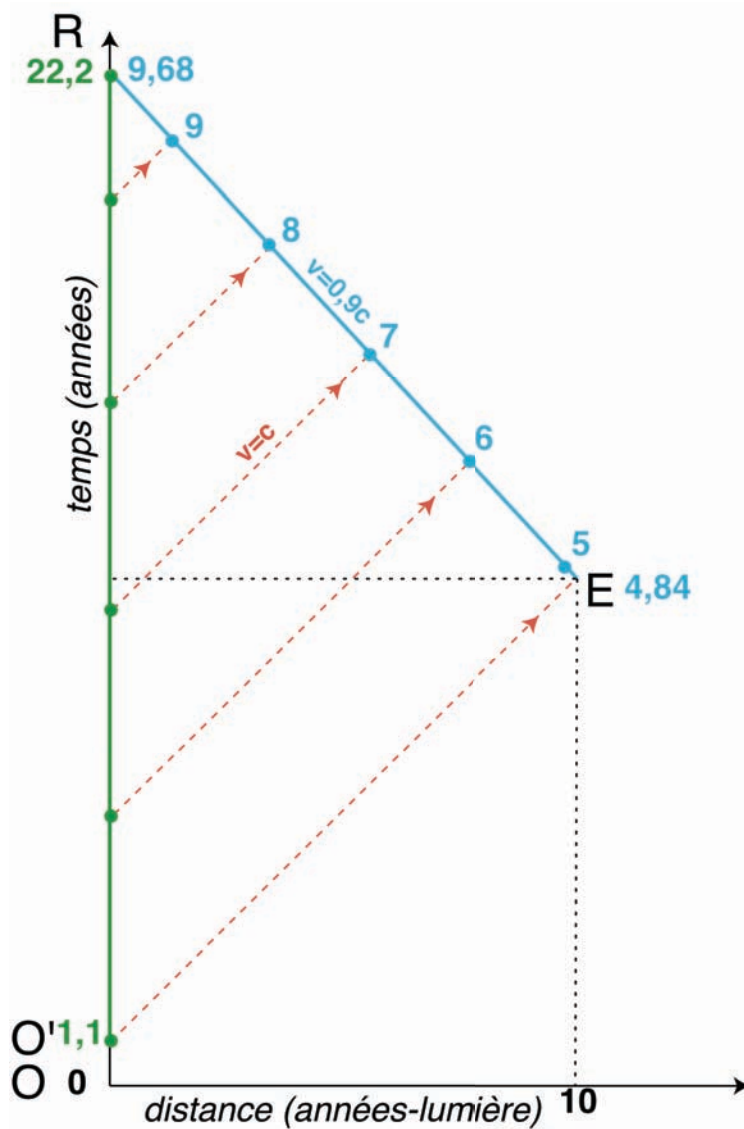
Aller : ce que mesure Sédentaire

- Sédentaire sait que Voyageur a dû arriver en E au bout de 11,1 années.
- Toutefois, les rayons lumineux envoyés de E mettent 10 ans à lui parvenir, en E'
- Sédentaire ne voit donc Voyageur arriver en E qu'au bout de 21,1 années.

Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus lentement.



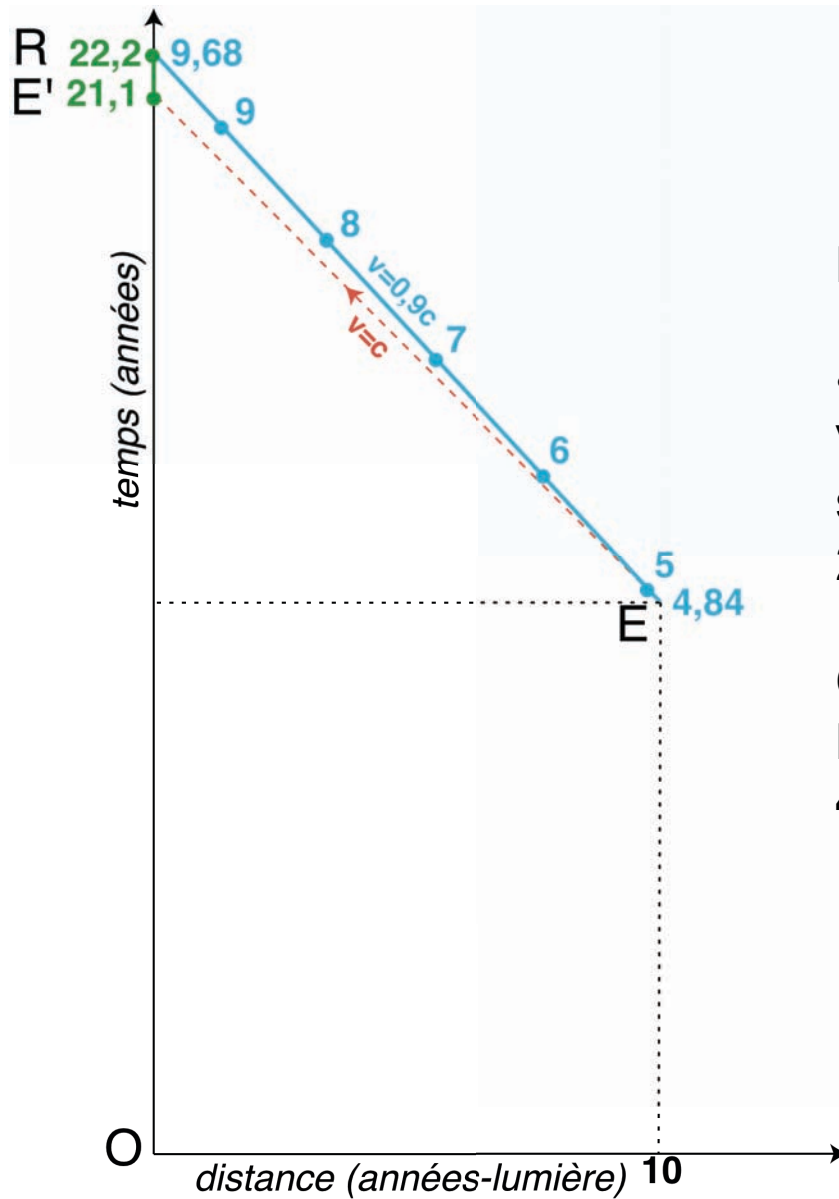
**Situation symétrique
(référentiels équivalents)**



Retour : ce que mesure Voyageur

- Voyageur rejoint la Terre en R au bout de 4,84 années.
- Pendant ce temps, il a observé 21,1 années s'écouler sur la Terre.

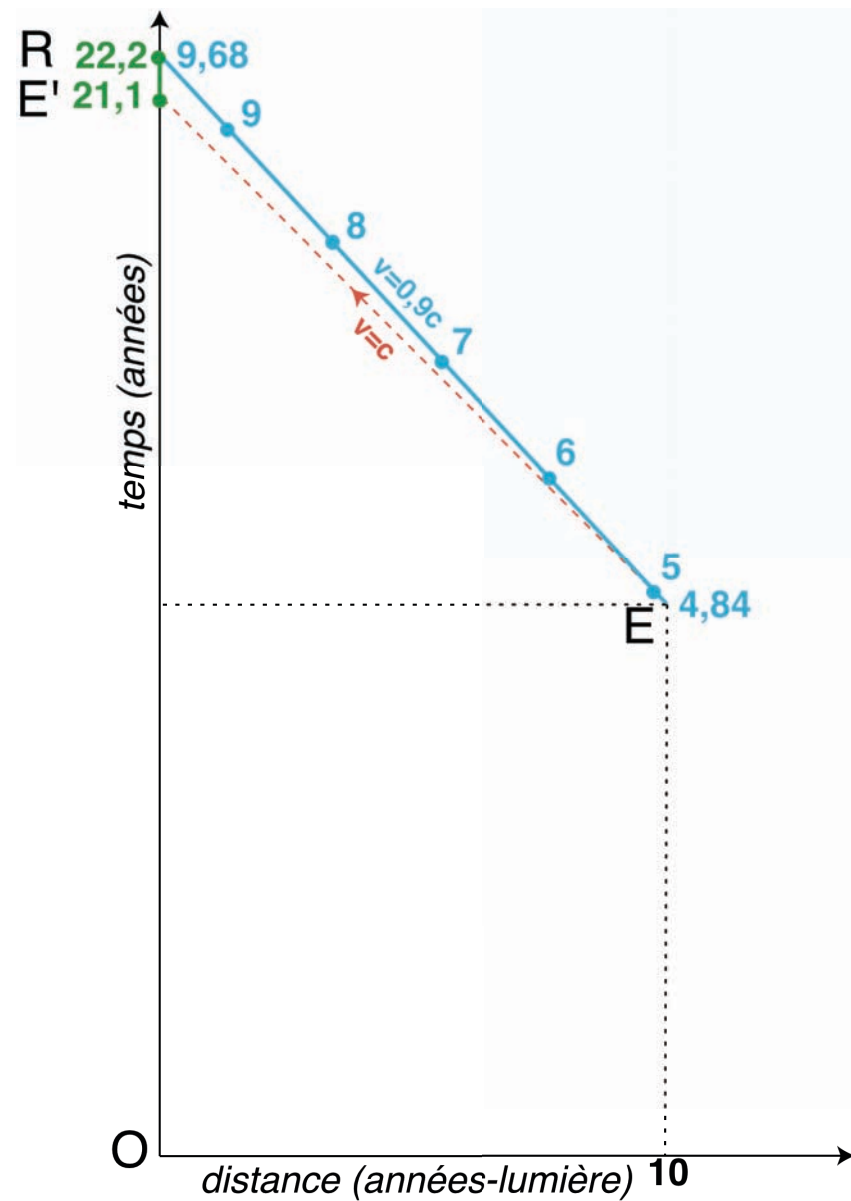
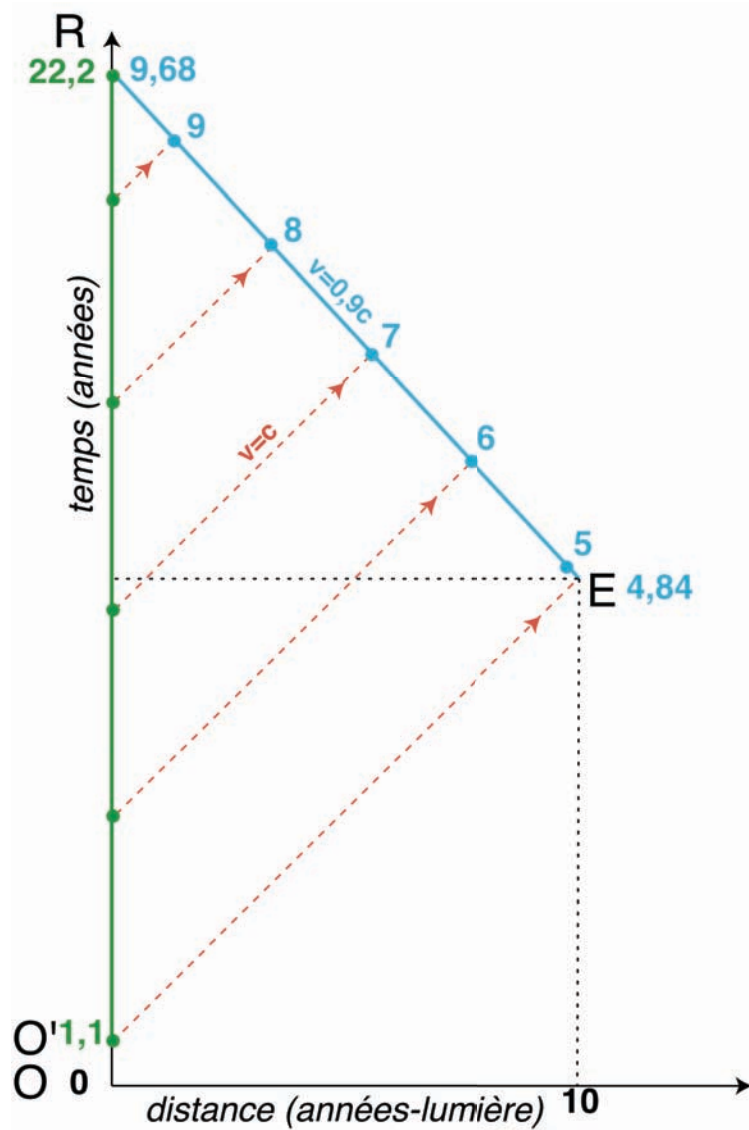
Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus vite.



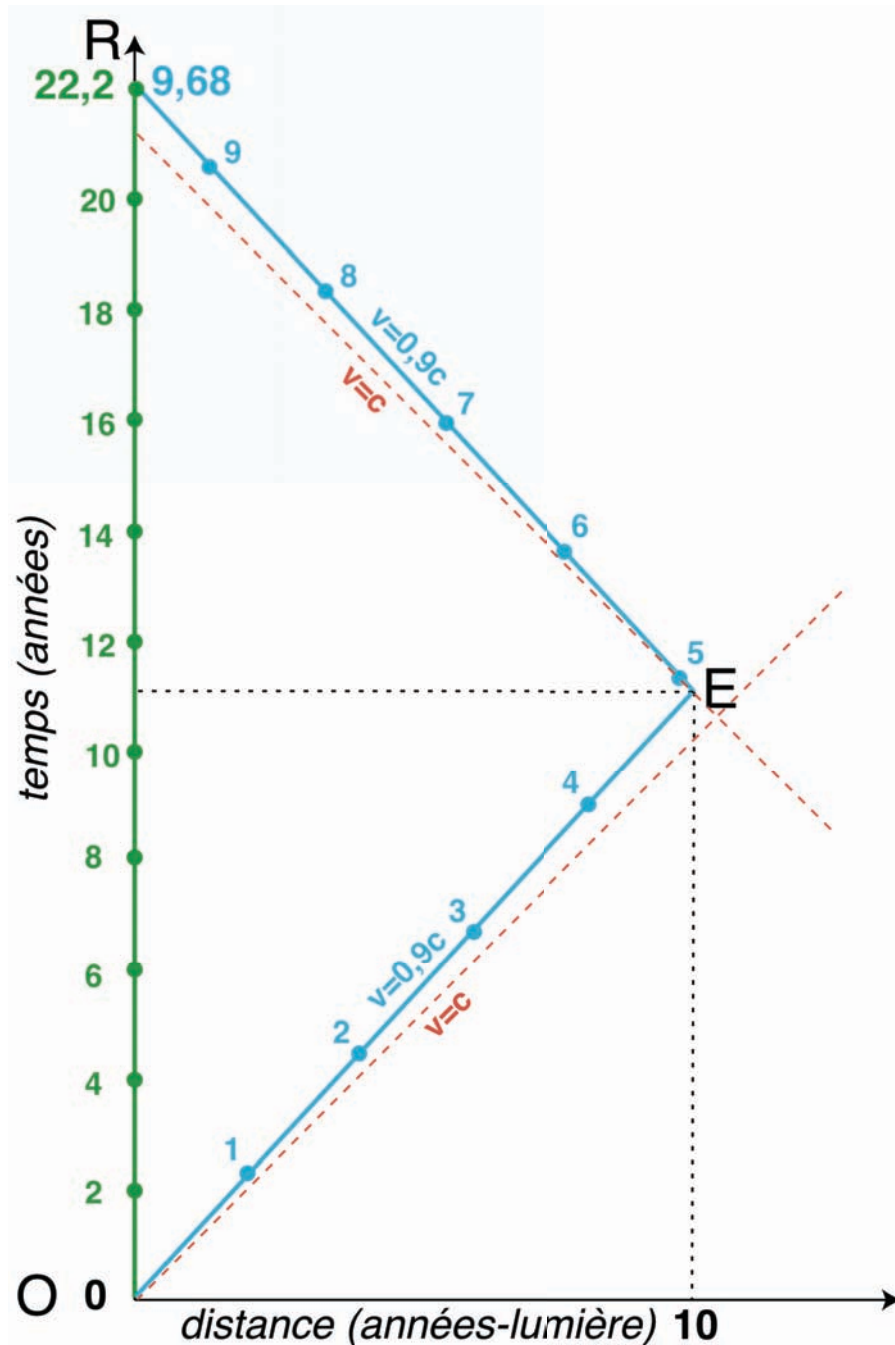
Retour : ce que mesure Sédentaire

- Sédentaire voit tout le retour de Voyageur se dérouler en 1,1 an, et lui serre la main en R au bout de 22,2 ans.

Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus vite.



➡ **Situation symétrique
(référentiels équivalents)**



Voyage complet

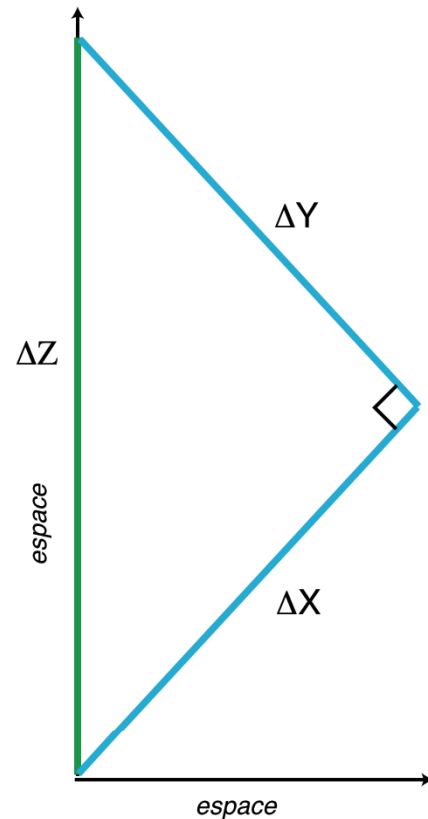
Lorsque Sédentaire et Voyageur se retrouvent en R, l'horloge de Sédentaire a battu 22,2 ans ; celle de Voyageur, 9,68 ans.

➔ **Situation asymétrique
(Voyageur a changé de
référentiel inertiel)**

➔ **Le temps propre le
plus long est pour
celui qui n'a pas
changé de référentiel
inertiel**

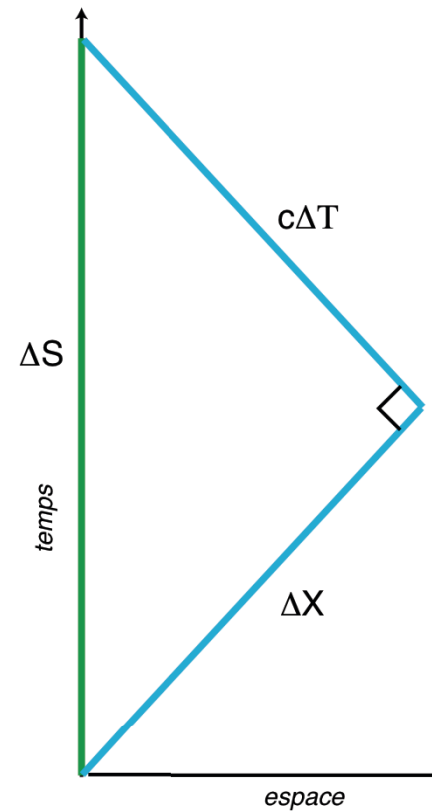
Accélération, ou structure de l'espace-temps ?

Espace-temps galiléen



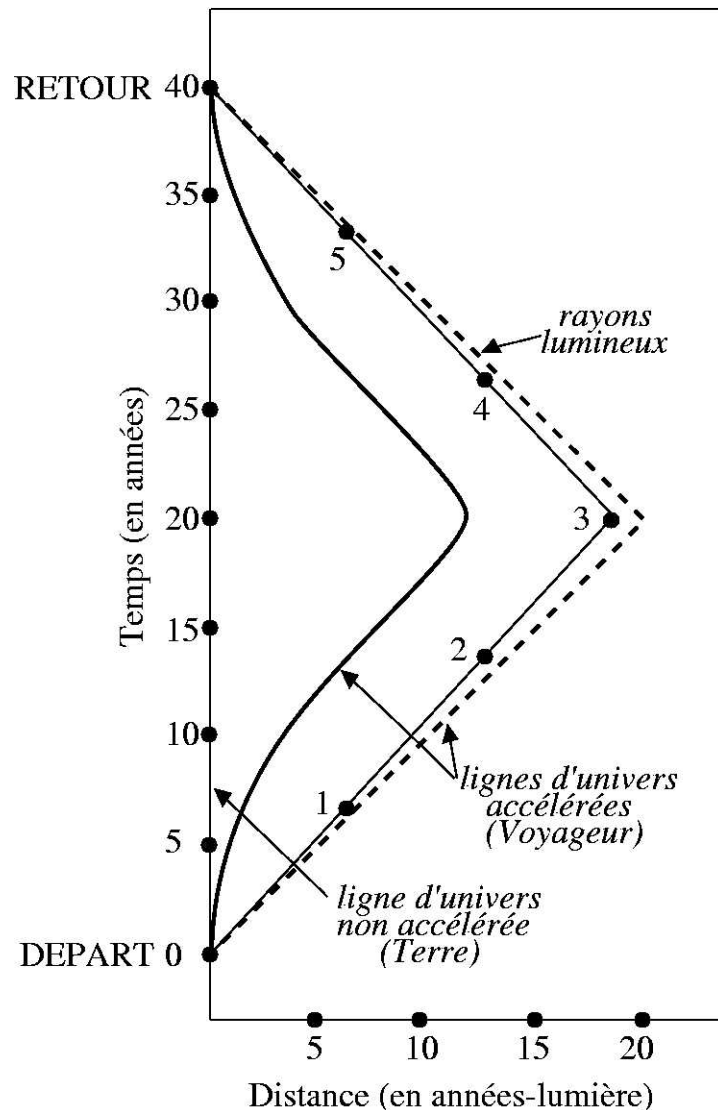
$$\Delta Z^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$$
$$\rightarrow \Delta Z < \Delta X + \Delta Y$$

Espace-temps de Minkowski



$$\Delta S^2 = \Delta X^2 - c^2\Delta T^2$$
$$\rightarrow \Delta S > \Delta X + c\Delta T$$

Solution en relativité générale



Référentiels inertiels galiléens



Référentiels inertiels en chute libre

Facteur temporel additionnel

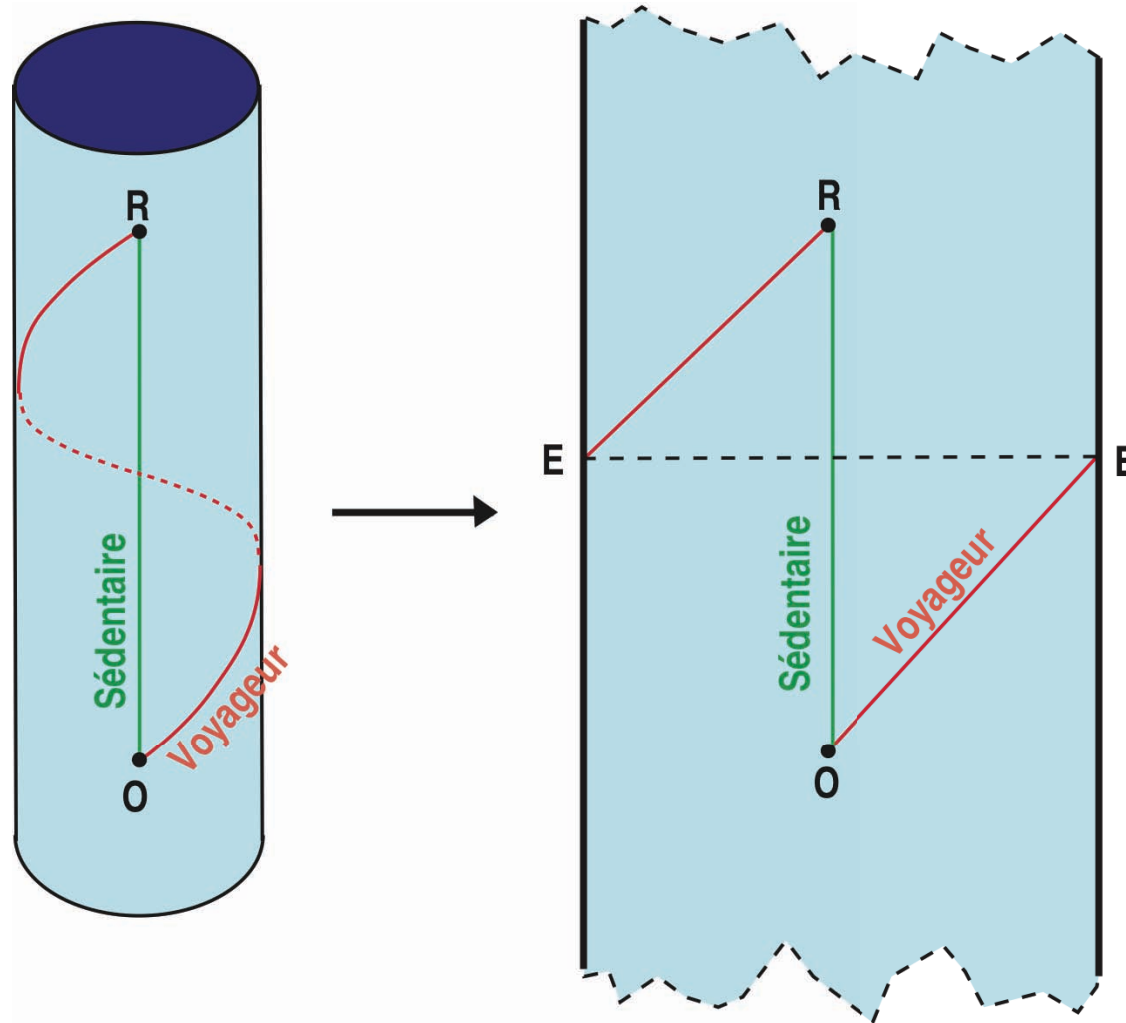


$$(1 + \Phi/c^2)$$

Même conclusion:

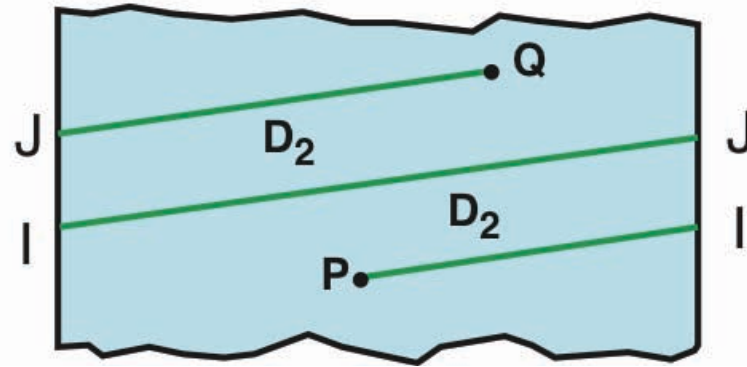
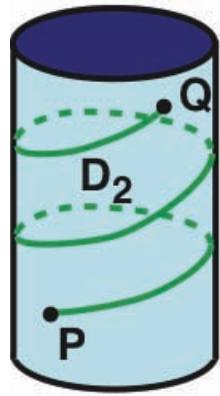
**Le temps propre le plus long
est pour celui qui ne change
pas de référentiel inertiel**

Sédentaire et Voyageur en espace multi-connexe ...

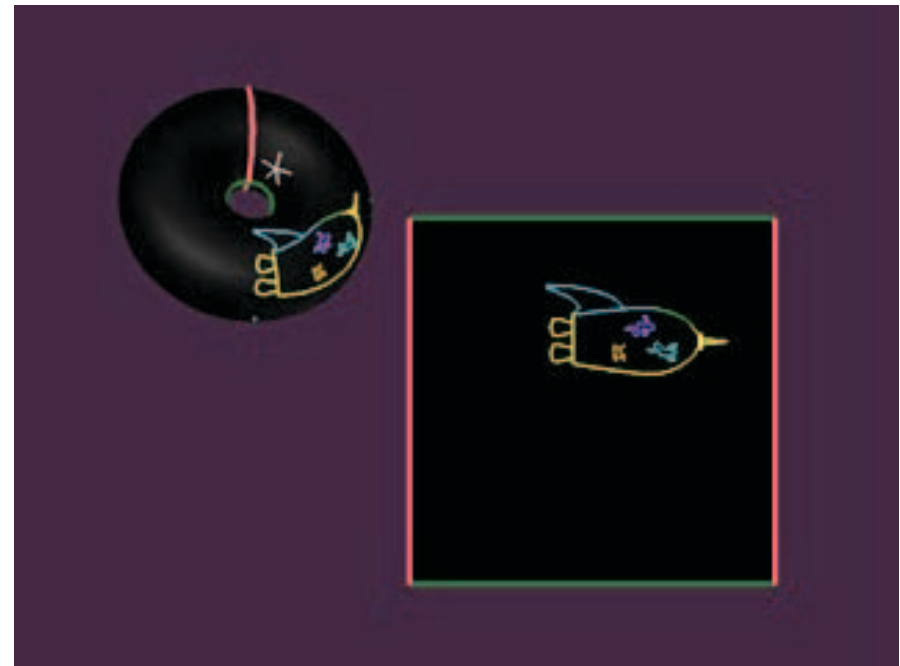
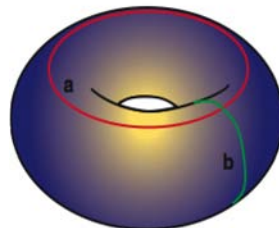
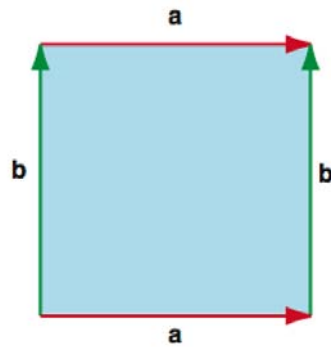


**Situation symétrique ??
(référentiels inertiels équivalents)**

Degré
d'enroulement

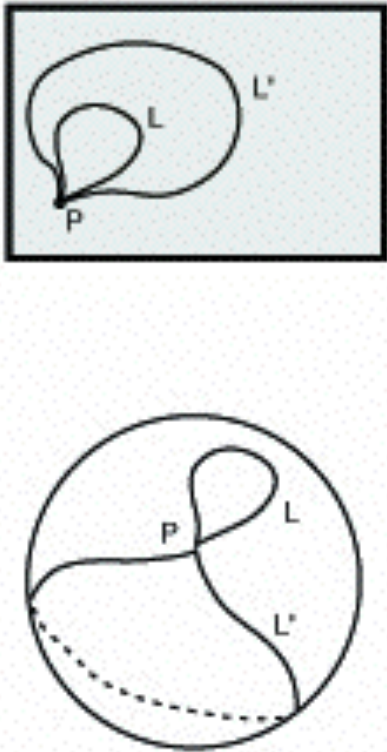
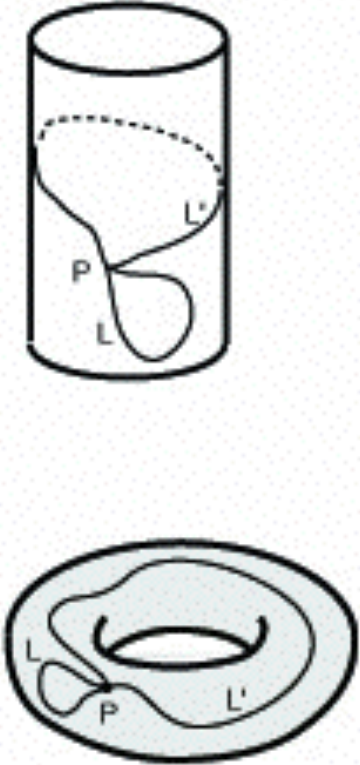


Lignes droites
sur un tore



Homotopie & degré de connexité

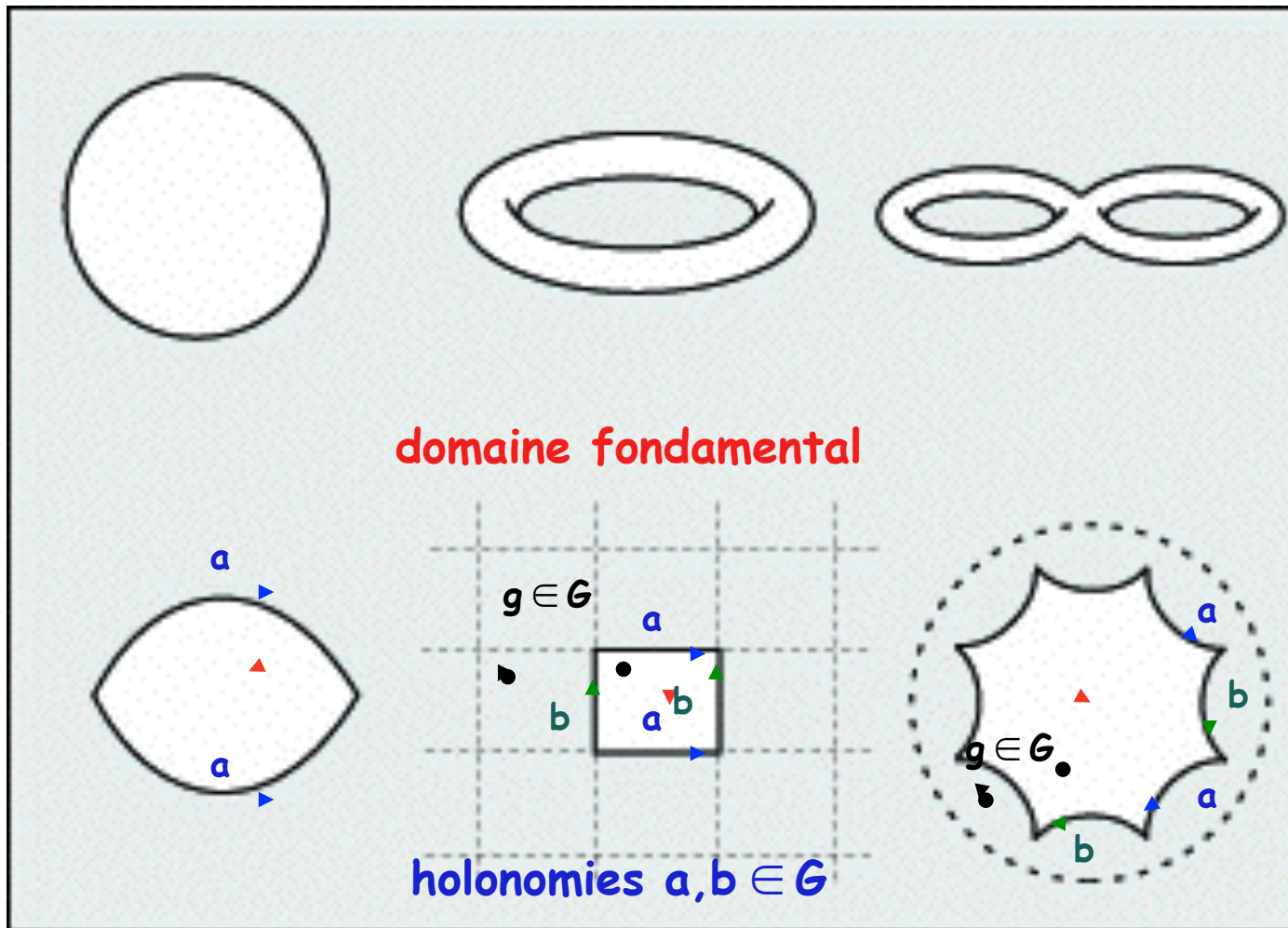
Classes
d'équivalence
des lacets =
groupe
d'homotopie
G

Monoconnexe	Multiconnexe
	

Sphère

Tore

Bretzel



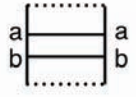
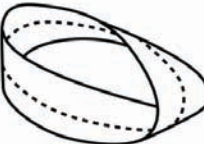
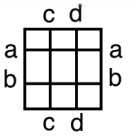
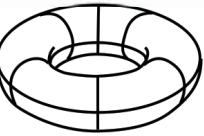
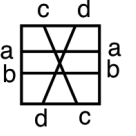
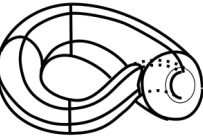
Revêtement universel

S^2 ($k > 0$)

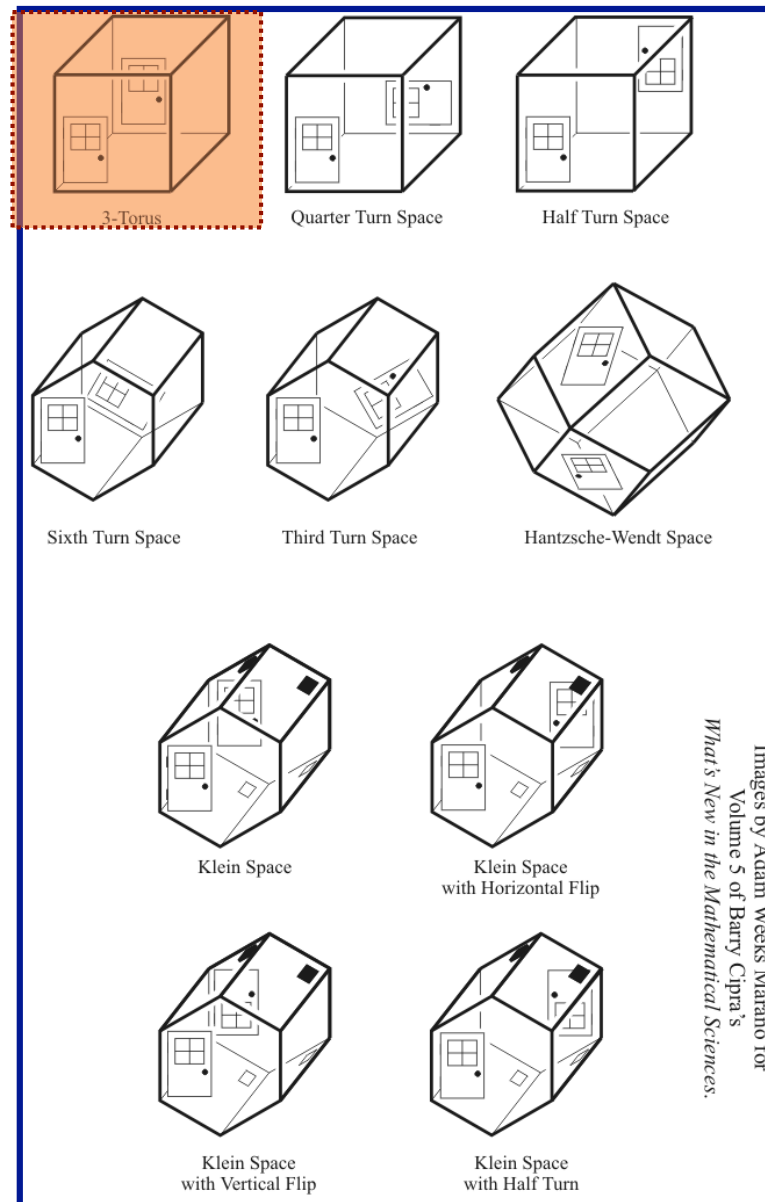
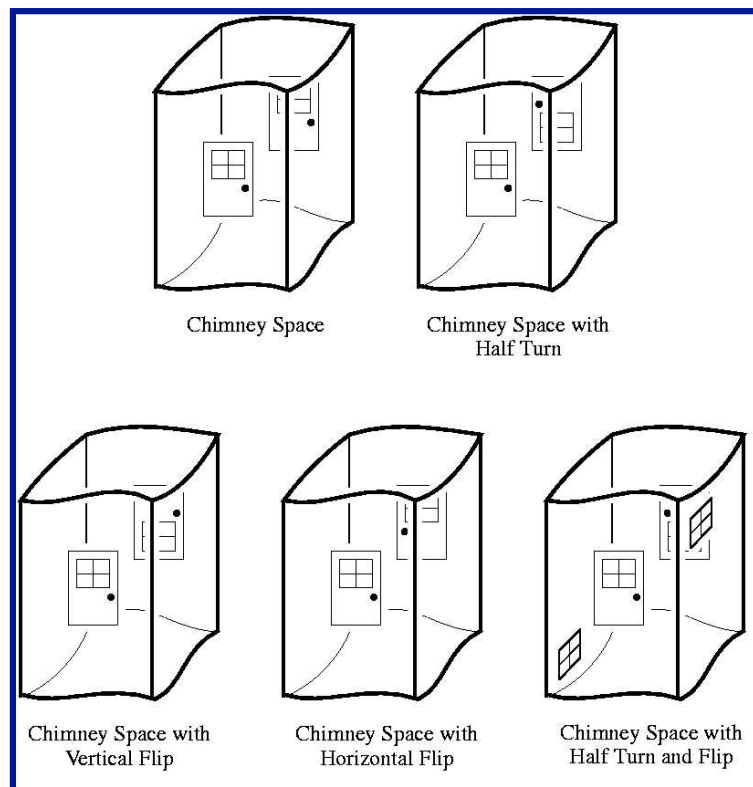
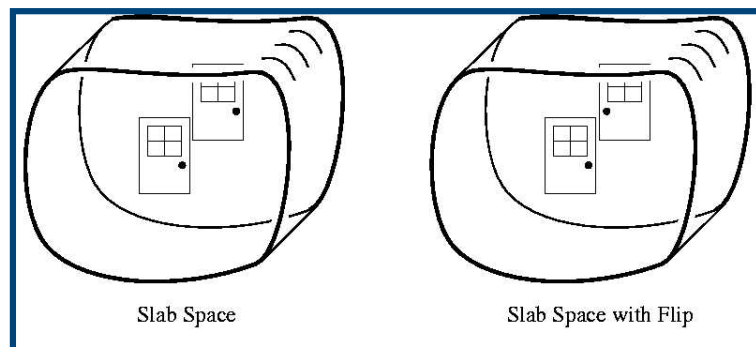
E^2 ($k = 0$)

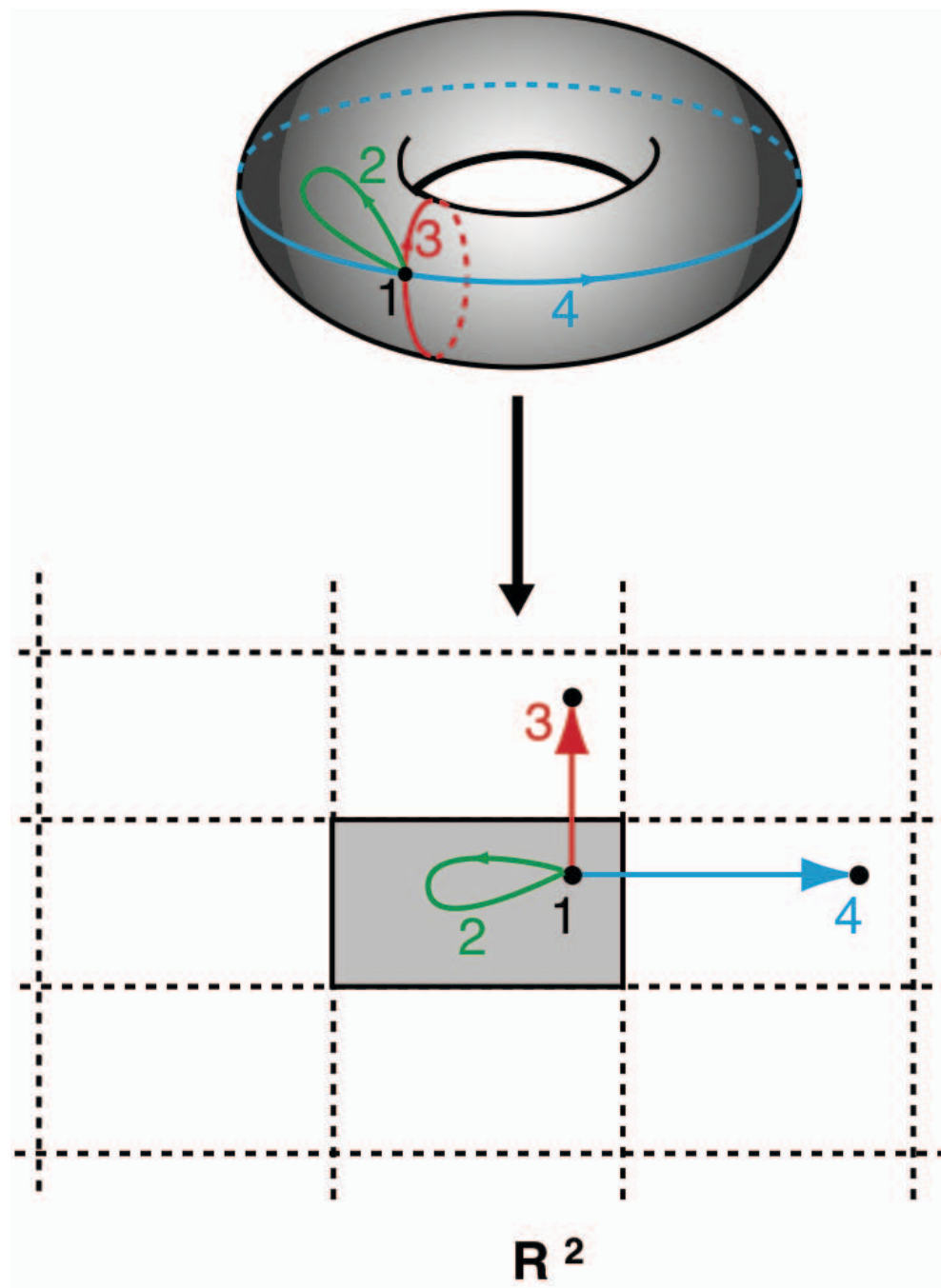
H^2 ($k < 0$)

Les quatre plans de Minkoski multi-connexes ...

<i>Nom</i>	<i>Polygone fondamental et identifications</i>	<i>Forme</i>	<i>Fermé</i>	<i>Orientable</i>
cylindre			NON	OUI
bande de Möbius			NON	NON
tore			OUI	OUI
bouteille de Klein			OUI	NON

Les 17 espaces-temps de Minkoski multi-connexes

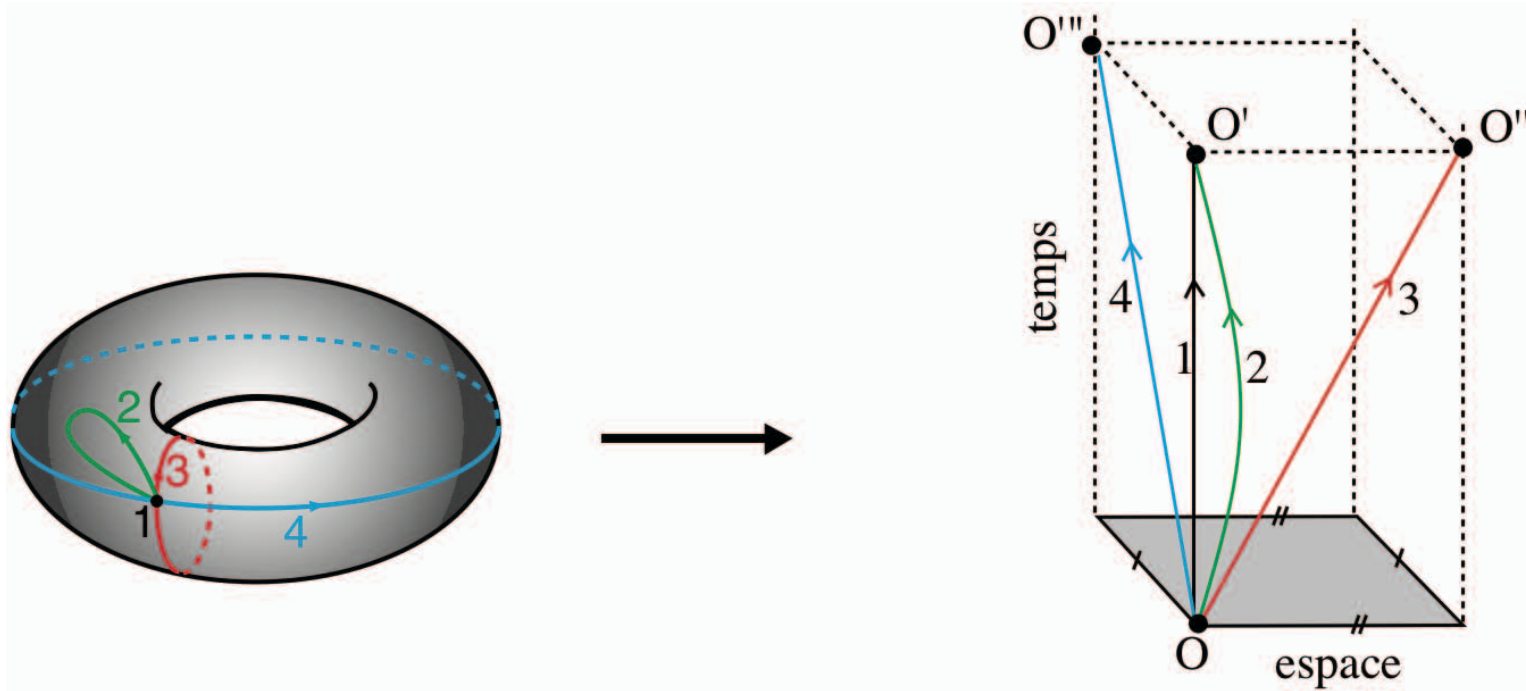




Trajet 2 :
Classe
d'homotopie $\{0\}$

Trajets 3,4 :
Classes
d'homotopie $\neq \{0\}$

Histoire de quadruplets dans un tore...



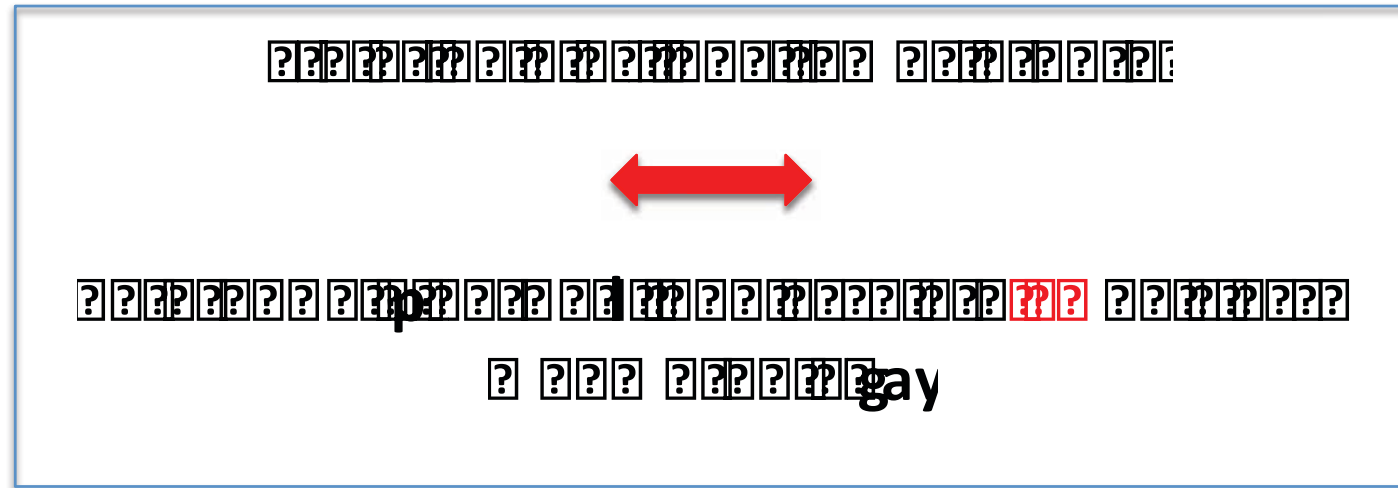
[[[[[[[[[[ns [[? [[[[[[[[[[→ [[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[n' ?

d[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[? ? ? e?

[[[[[[[[[[nt [[[[[[[[[[S[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[→ [[[[[[[[[[

[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[[n' ?

Règle générale...



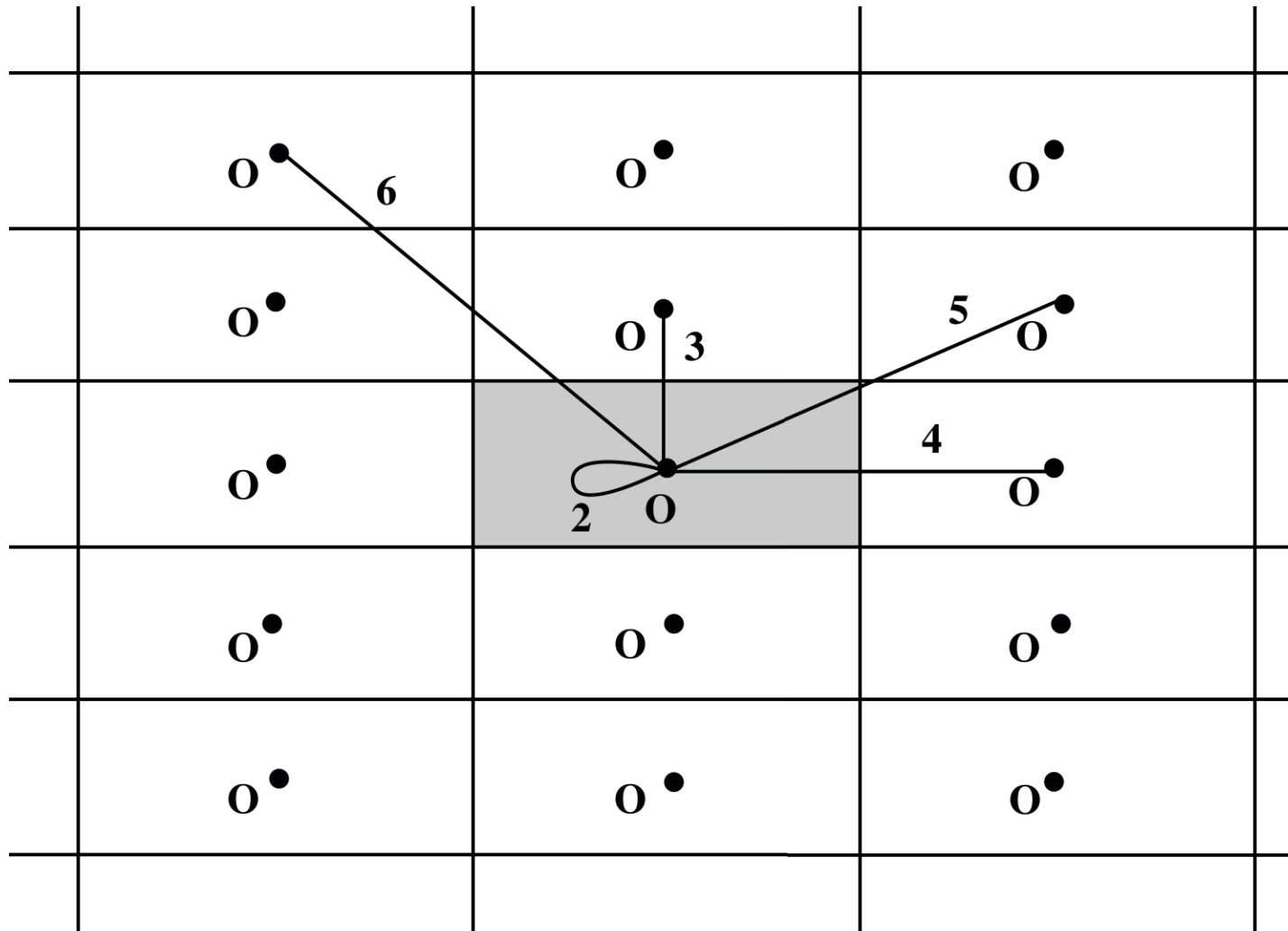
? ?

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

? ?

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Solution complète



Degrés
d'enroulement

- trajet 2 : $\{0,0\}$
- trajet 3 : $\{0,1\}$
- trajet 4 : $\{1,0\}$
- trajet 5 : $\{1,1\}$
- trajet 6 : $\{1,2\}$

etc.

Métrique de l'espace de revêtement universel:

$t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > t_5 > t_6$ etc.

Topologie et Groupes de symétrie

- **Toutes les solutions exactes connues de la RG admettent un groupe de symétrie ($< \text{Poincaré}$)**

• Modèles de Friedmann-Lemaître:

Solutions spatialement homogènes et isotropes

Sections spatiales:

$$\tilde{M} = (E^3, S^3, H^3) \text{ si monoconnexe } (G_3 + I_3)$$

$$M = \tilde{M} / \Gamma \quad \text{si multiconnexe (G}_3\text{)}$$



QUESTION

p [?] [??] [??] [?] [??] [??] [?] [?] [?] [??] [??] [?] [?] ed [?]

Multiply-connected Friedmann-Lemaître solutions

- Einstein's Eqs. $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

- Space-time $M_4 = E \times M_3$

- Metric $ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) dl^2$

$$dl^2 = \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) & \text{if } k = 0 \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) & \text{if } k = +1 \\ d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) & \text{if } k = -1 \end{cases}$$

- Spatial hypersurfaces $M = \frac{\tilde{M}}{\Gamma}, \quad \tilde{M} = (E^3, S^3, H^3)$