LA PREUVE CARTESIENNE DE LA QUADRATURE DU CERCLE

D. Crippa[1]

[1]CNRS, REHSEIS

Escola paranaense de Historia e Filosofia da Ciência, 2009

Outline

Descartes sur l'impossibilité de la quadrature

Pendant la première moitié du XVII siècle le problème de savoir si la quadrature du cercle est possible restait un problème ouvert dans l'agenda des mathématiciens.

En dépit de toute démonstration rigoureuse et formelle (il faudra attendre la deuxième moitié du XIX siècle pour cela), l'opinion de Descartes par rapport à la possibilité de la quadrature du cercle est pérentoire.

Descartes sur l'impossibilité de la quadrature

Pendant la première moitié du XVII siècle le problème de savoir si la quadrature du cercle est possible restait un problème ouvert dans l'agenda des mathématiciens.
En dépit de toute démonstration rigoureuse et formelle (il faudra attendre la deuxième moitié du XIX siècle pour cela), l'opinion de Descartes par rapport à la possibilité de la quadrature du cercle est pérentoire.

Ainsi, dans une lettre du 1638, exposant à Mersennequels genres de problèmes sont à placer hors de la géométrie, il juge de manière tranchante autour de l'impossibilité de resoudre ce problème:

Mais, pour les questions de Geometrie qu'ils ne peuvent soudre & croient ne pouvoir estre resolues par ma methode (...) il y en a d'impossibles, comme la quadrature du cercle &c. ...

> *(Descartes à Mersenne, 31 mars 1638, dans Oeuvres de Descartes, vol. II ed. Adam Tannery, p. 91).*

Ainsi, dans une lettre du 1638, exposant à Mersennequels genres de problèmes sont à placer hors de la géométrie, il juge de manière tranchante autour de l'impossibilité de resoudre ce problème:
Mais, pour les questions de Geometrie qu'ils ne peuvent soudre & croient ne pouvoir estre resolues par ma methode (...) il y en a d'impossibles, comme la quadrature du cercle &c. ...

> *(Descartes à Mersenne, 31 mars 1638, dans Oeuvres de Descartes, vol. II ed. Adam Tannery, p. 91).*

Existence vs construction

Même si aucun argument formel autour de la possibilité ou de l'impossibilité de la quadrature du cercle pouvait être donné à l'époque, un point sur la manière de résoudre le problème était partagé: démontrer l'existence d'un carré d'aire équivalente à un cercle donné n'était pas censé être suffisant;
au contraire, une *construction*du carré par des *moyens géométriques acceptables* était exigée.

Existence vs construction

Même si aucun argument formel autour de la possibilité ou de l'impossibilité de la quadrature du cercle pouvait être donné à l'époque, un point sur la manière de résoudre le problème était partagé: démontrer l'existence d'un carré d'aire équivalente à un cercle donné n'était pas censé être suffisant;
au contraire, une *construction*du carré par des *moyens géométriques acceptables* était exigée.

Existence vs construction

Même si aucun argument formel autour de la possibilité ou de l'impossibilité de la quadrature du cercle pouvait être donné à l'époque, un point sur la manière de résoudre le problème était partagé: démontrer l'existence d'un carré d'aire équivalente à un cercle donné n'était pas censé être suffisant;

au contraire, une *construction*du carré par des *moyens géométriques acceptables* était exigée.

Deux exemples

- Les anciens géomètres avaient donné des solutions par l'emploi de certaines courbes, comme la quadratrice, la spirale et l'hélice cylindrique. En particulier, je me concentrerai dans la suite sur la solution obtenue par la quadratrice, illustrée dans le quatrième livre de la *Collection Mathématique* de Pappus.
- Parmi les manuscrits de Descartes publiés avec le titre *Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes* dans le volume *Opuscola posthuma physica et mathematica* (Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, 1701), on peut trouver un fragment (le numéro 6), datable aux années 1625-1628, contenant une solution géométrique au problème de la quadrature du cercle, due à Descartes lui meme, et différente par rapport à celle de Pappus.

Deux exemples

- Les anciens géomètres avaient donné des solutions par l'emploi de certaines courbes, comme la quadratrice, la spirale et l'hélice cylindrique. En particulier, je me concentrerai dans la suite sur la solution obtenue par la quadratrice, illustrée dans le quatrième livre de la *Collection Mathématique* de Pappus.
- Parmi les manuscrits de Descartes publiés avec le titre *Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes* dans le volume *Opuscola posthuma physica et mathematica* (Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, 1701), on peut trouver un fragment (le numéro 6), datable aux années 1625-1628, contenant une solution géométrique au problème de la quadrature du cercle, due à Descartes lui meme, et différente par rapport à celle de Pappus.

Objectifs

Dans la suite de cette intervention, je me proposerai deux objectifs.

- En premier lieu, j'examinerai la quadrature contenue dans le fragment 6 des *Opuscula*.
- Ensuite, je discuterai les raisons pour lesquelles Descartes n'accepta ni la solution que l'on trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus ni celle trouvée par lui même.

Objectifs

Dans la suite de cette intervention, je me proposerai deux objectifs.

- En premier lieu, j'examinerai la quadrature contenue dans le fragment 6 des *Opuscula*.
- Ensuite, je discuterai les raisons pour lesquelles Descartes n'accepta ni la solution que l'on trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus ni celle trouvée par lui même.

Objectifs

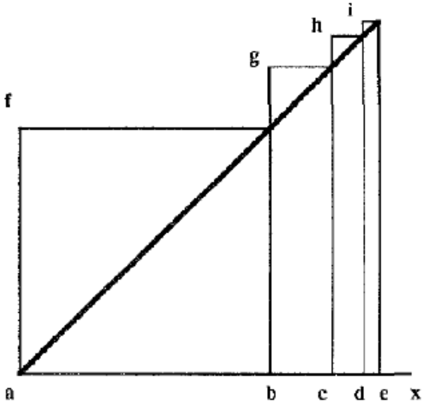
Dans la suite de cette intervention, je me proposerai deux objectifs.

- En premier lieu, j'examinerai la quadrature contenue dans le fragment 6 des *Opuscula*.
- Ensuite, je discuterai les raisons pour lesquelles Descartes n'accepta ni la solution que l'on trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus ni celle trouvée par lui même.

Le fragment cartésien

Je passerai au fragment sur la quadrature écrit par Descartes entre 1625 et 1628.

> *LA QUADRATURE DU CERCLE. Pour carrer le cercle, je ne trouve rien de plus apte que, étant donné un carré bf, d'ajouter le rectangle cg délimité par les lignes ac et cb, égale à la quatrième partie du précédent; et ensuite le rectangle dh, formé par les segments da, dc égale à la quatrième partie du précédent, et dans la même manière d'ajouter le rectangle ei, et d'autres infinis (alia infinita) jusqu'à atteindre le point x. Tous ensembles, ils feront la troisième partie du carré bf....*


i
h
g
f
a
b
c
d
e
x

... Et cette ligne ax sera le diamètre du cercle, dont la circonférence est égale au périmètre de ce carré bf. D'autre part, ac est le diamètre du cercle inscrit dans l'octagone isopérimètre au carré bf, ad le diamètre inscrit à la figure de 16 côtés, ae le diamètre du cercle inscrit dans la figure de 32 côtés, isopérimètre au carré bf; et ainsi à l'infini....
(René Descartes, Oeuvres de Descartes, Vrin paris, 1897-1910. ed. Adam Tannery, vol X, p. 279).

Analyse du texte

Le texte se prête à être divisé en deux parties:

- Descartes présente la construction d'une suite infinie des rectangles *cg*, *dh*, *ei*... tels que l'air de chacun soit égal à $\frac{1}{4}$ du précedent, et l'aire du premier à un quart d'un carré donné *bf*, pour en conclure que la somme de leurs aires équivaut à un tiers de l'aire de *bf*.
- La suite des rectangles construits comme en figure détermine les diamètres (*ac*, *ad*, *ae*...) des cercles inscrits dans les polygônes réguliers dont le nombre de cotés est 2^n (pour n$\geq$2: carré, octagône, 16-gône...), qui ont même périmètre que le carré de perimètre donné *bf*.
- Le segment maximale axsera le diamètre du cercle ayant même périmètre que le carré *bf*.

Analyse du texte

Le texte se prête à être divisé en deux parties:

- Descartes présente la construction d'une suite infinie des rectangles *cg*, *dh*, *ei*... tels que l'air de chacun soit égal à $\frac{1}{4}$ du précedent, et l'aire du premier à un quart d'un carré donné *bf*, pour en conclure que la somme de leurs aires équivaut à un tiers de l'aire de *bf*.
- La suite des rectangles construits comme en figure détermine les diamètres (*ac, ad, ae*...) des cercles inscrits dans les polygônes réguliers dont le nombre de cotés est 2^n (pour n$\geq$2: carré, octagône, 16-gône...), qui ont même périmètre que le carré de perimètre donné *bf*.
- Le segment maximale *ax*sera le diamètre du cercle ayant même périmètre que le carré *bf*.

Analyse du texte

Le texte se prête à être divisé en deux parties:

- Descartes présente la construction d'une suite infinie des rectangles *cg*, *dh*, *ei*... tels que l'air de chacun soit égal à $\frac{1}{4}$ du précedent, et l'aire du premier à un quart d'un carré donné *bf*, pour en conclure que la somme de leurs aires équivaut à un tiers de l'aire de *bf*.
- La suite des rectangles construits comme en figure détermine les diamètres (*ac, ad, ae*...) des cercles inscrits dans les polygônes réguliers dont le nombre de cotés est 2^n (pour n$\geq$2: carré, octagône, 16-gône...), qui ont même périmètre que le carré de perimètre donné *bf*.
- Le segment maximale *ax*sera le diamètre du cercle ayant même périmètre que le carré *bf*.

Analyse du texte

Le texte se prête à être divisé en deux parties:

- Descartes présente la construction d'une suite infinie des rectangles *cg*, *dh*, *ei*... tels que l'air de chacun soit égal à $\frac{1}{4}$ du précedent, et l'aire du premier à un quart d'un carré donné *bf*, pour en conclure que la somme de leurs aires équivaut à un tiers de l'aire de *bf*.
- La suite des rectangles construits comme en figure détermine les diamètres (*ac, ad, ae*...) des cercles inscrits dans les polygônes réguliers dont le nombre de cotés est 2^n (pour n$\geq$2: carré, octagône, 16-gône...), qui ont même périmètre que le carré de perimètre donné *bf*.
- Le segment maximale *ax*sera le diamètre du cercle ayant même périmètre que le carré *bf*.

Observations

- Comme $ac < ad < ae...$ (par construction), et que *ac, ad, ae* ... sont les diamètres des cercles inscrits dans des polygônes réguliers à 4, 16, 32... côtés, leurs aires formeront une succession croissante aussi. Descartes connaissait le théorème suivant, comme il écrit dans la Règle VII des *Regulae* (1628):

  ...l'aire du cercle est plus grande que toutes les aires des autres figures, dont la périphérie est égale...
  (R. Descartes, Regulae ad directionem ingenii, tr. J. L. Marion, p. 24).

- Par conséquent, la suite *ac, ad, ae...* aura comme élément maximale *ax* (diamètre du cercle).

Observations

- Comme $ac < ad < ae$... (par construction), et que *ac, ad, ae* ... sont les diamètres des cercles inscrits dans des polygônes réguliers à 4, 16, 32... côtés, leurs aires formeront une succession croissante aussi. Descartes connaissait le théorème suivant, comme il écrit dans la Règle VII des *Regulae* (1628):

  ...l'aire du cercle est plus grande que toutes les aires des autres figures, dont la périphérie est égale...
  (R. Descartes, Regulae ad directionem ingenii, tr. J. L. Marion, p. 24).

- Par conséquent, la suite *ac, ad, ae*... aura comme élément maximale *ax* (diamètre du cercle).

Observations

- Comme *ac* < *ad* < *ae*... (par construction), et que *ac, ad, ae* ... sont les diamètres des cercles inscrits dans des polygônes réguliers à 4, 16, 32... côtés, leurs aires formeront une succession croissante aussi. Descartes connaissait le théorème suivant, comme il écrit dans la Règle VII des *Regulae* (1628):

  ...l'aire du cercle est plus grande que toutes les aires des autres figures, dont la périphérie est égale...
  (R. Descartes, Regulae ad directionem ingenii, tr. J. L. Marion, p. 24).

- Par conséquent, la suite *ac, ad, ae*... aura comme élément maximale *ax* (diamètre du cercle).

- Descartes renverse le problème de la rectification de la circonférence: étant donnée la mesure de la circonférence, il est demandé de déterminé la longueur du diamètre.
- Mais le résultat auquel il aboutit est de toute façon la quadrature du cercle, en vrtue de la proposition I de la *Mesure du cercle* d'Archimède:

  Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

- Descartes renverse le problème de la rectification de la circonférence: étant donnée la mesure de la circonférence, il est demandé de déterminé la longueur du diamètre.
- Mais le résultat auquel il aboutit est de toute façon la quadrature du cercle, en vrtue de la proposition I de la *Mesure du cercle* d'Archimède:

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

- Descartes renverse le problème de la rectification de la circonférence: étant donnée la mesure de la circonférence, il est demandé de déterminé la longueur du diamètre.
- Mais le résultat auquel il aboutit est de toute façon la quadrature du cercle, en vrtue de la proposition I de la *Mesure du cercle* d'Archimède:

  Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Le commentaire d'Euler

- Aucune indication dans le texte rend explicite la relation entre la construction des rectangles dont les aires sont en succession géométrique, et le fait que leurs bases forment la suite des diamètres,respectivement, du cercle et des polygones réguliers à 8, 16, 32, 64 cotés, *sic in infinitum*, isopérimètres au carré *bf*de départ.
- Afin de donner une explication de la manière dont les deux moments de la démonstration cartésienne s'agencent, j'utiliserai un commentaire de ce problème donnée par Euler, publié en 1763 sous le titre: *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*et paru dans les Comptes rendues de l'Académie de St. Petersburgh.

Le commentaire d'Euler

- Aucune indication dans le texte rend explicite la relation entre la construction des rectangles dont les aires sont en succession géométrique, et le fait que leurs bases forment la suite des diamètres,respectivement, du cercle et des polygones réguliers à 8, 16, 32, 64 cotés, *sic in infinitum*, isopérimètres au carré *bf*de départ.
- Afin de donner une explication de la manière dont les deux moments de la démonstration cartésienne s'agencent, j'utiliserai un commentaire de ce problème donnée par Euler, publié en 1763 sous le titre: *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*et paru dans les Comptes rendues de l'Académie de St. Petersburgh.

Problème de Euler

Euler énonce un problème qui une fois résolu, expliquera la relation entre la construction cartésienne des rectangles et la succession des diamètres des cercles inscrits dans les polygones aux côtés croissants en mesure double:

- Étant donné un cercle inscrit dans un polygone régulier, trouver un deuxième cercle tel que, si l'on circonscrit autour de ceci un polygone dont le nombre de côtés est le double du premier, les deux polygones seront isopérimètres.

Problème de Euler

Euler énonce un problème qui une fois résolu, expliquera la relation entre la construction cartésienne des rectangles et la succession des diamètres des cercles inscrits dans les polygones aux côtés croissants en mesure double:

- Étant donné un cercle inscrit dans un polygone régulier, trouver un deuxième cercle tel que, si l'on circonscrit autour de ceci un polygone dont le nombre de côtés est le double du premier, les deux polygônes seront isopérimètres.

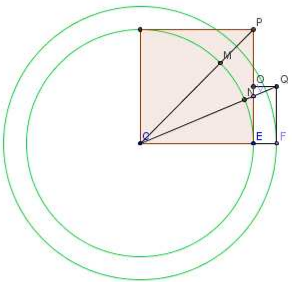


Fig. 2

- $\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF}$
- $\frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE+CP}$
- Et d'ici: $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$
- Le point F est tel que le rectangle formé par le rayon du deuxième cercle et la différence entre les rayons CF, CE est égale à un quart du carré construit sur le démi-côté EP.

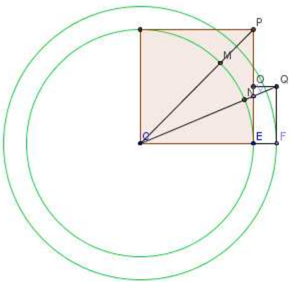


Fig. 2

- $\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF}$
- $\frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE+CP}$
- Et d'ici: $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$
- Le point F est tel que le rectangle formé par le rayon du deuxième cercle et la différence entre les rayons CF, CE est égale à un quart du carré construit sur le démi-côté EP.

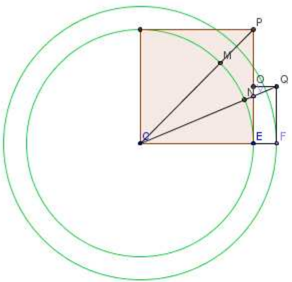


Fig. 2

- $\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF}$
- $\frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE+CP}$
- Et d'ici: $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$
- Le point F est tel que le rectangle formé par le rayon du deuxième cercle et la différence entre les rayons CF, CE est égale à un quart du carré construit sur le démi-côté EP.

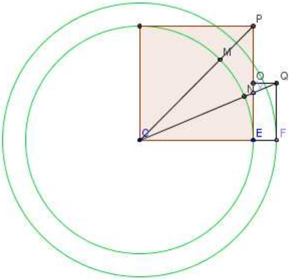
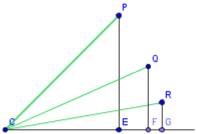


Fig. 2

- $\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF}$
- $\frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE+CP}$
- Et d'ici: $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$
- Le point F est tel que le rectangle formé par le rayon du deuxième cercle et la différence entre les rayons CF, CE est égale à un quart du carré construit sur le démi-côté EP.

Construction cartésienne expliquée

Une fois résolu le premier problème, Euler passe à démontrer la construction cartésienne, et il obtient, par une suite d'égalites:



$r(CF, EF) = \frac{1}{4}EP^2$
$r(CG, FG) = \frac{1}{16}EP^2$
$r(CH, GH) = \frac{1}{32}EP^2$

Observations

- De manière que la somme des rectangles (à gauche) correspondra à la limite de la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, pour n tendant à l'infini, multipliée par l'aire du carré q(EP): donc $\frac{1}{3}EP^2$, comme dans la construction cartésienne.
- Euler tient à séparer le commentaire de la proposition cartésienne de ses développements analytiques, données dans une deuxième partie du commentaire, et que sa reconstruction du passage de Descartes ne présuppose aucune connaissance technique qui n'était disponible à Descartes lui même. Il est donc possible que ce dernier ait suivi cette voie pour construire la succession de rectangles *cg*, *dh*, *ei* ...

Observations

- De manière que la somme des rectangles (à gauche) correspondra à la limite de la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, pour n tendant à l'infini, multipliée par l'aire du carré q(EP): donc $\frac{1}{3}EP^2$, comme dans la construction cartésienne.
- Euler tient à séparer le commentaire de la proposition cartésienne de ses développements analytiques, données dans une deuxième partie du commentaire, et que sa reconstruction du passage de Descartes ne présuppose aucune connaissance technique qui n'était disponible à Descartes lui même. Il est donc possible que ce dernier ait suivi cette voie pour construire la succession de rectangles *cg*, *dh*, *ei* ...

Impossible, en quel sens?

- Ayant établi que la solution donnée par Pappus et celle donnée par Descartes sont, les deux, des solutions correctes du problème de la quadrature du cercle, il est raisonnable de se demander

pourquoi Descartes continuait à considérer le problème de la quadrature du cercle *impossible*.

Impossible, en quel sens?

- Ayant établi que la solution donnée par Pappus et celle donnée par Descartes sont, les deux, des solutions correctes du problème de la quadrature du cercle, il est raisonnable de se demander

pourquoi Descartes continuait à considérer le problème de la quadrature du cercle *impossible*.

Impossible, en quel sens?

- Ayant établi que la solution donnée par Pappus et celle donnée par Descartes sont, les deux, des solutions correctes du problème de la quadrature du cercle, il est raisonnable de se demander

pourquoi Descartes continuait à considérer le problème de la quadrature du cercle *impossible*.

Définition

- La solution d'un problème ainsi que son acceptation à l'intérieur d'une communauté mathématique ne dépendent pas seulement de l'absence d'erreurs dans le calcul ou de l'absence d'arguments fallacieux dans la structure logico argumentative: souvent, l'emploi de procédures de resolution dépend de leur recevabilité par rapport à des standards extra-mathématiques:
- Henk Bos a montré que parmi les mathématiciens, entre XVIème et XVIIème siècle, un ensemble de critères, qu'il appelle: exactitude géométrique, a été au centre d'un important débât pour déterminer les conditions nécéssaires et suffisants afin de:

Définition

- La solution d'un problème ainsi que son acceptation à l'intérieur d'une communauté mathématique ne dépendent pas seulement de l'absence d'erreurs dans le calcul ou de l'absence d'arguments fallacieux dans la structure logico argumentative: souvent, l'emploi de procédures de resolution dépend de leur recevabilité par rapport à des standards extra-mathématiques:
- Henk Bos a montré que parmi les mathématiciens, entre XVIème et XVIIème siècle, un ensemble de critères, qu'il appelle: exactitude géométrique, a été au centre d'un important débât pour déterminer les conditions nécéssaires et suffisants afin de:

1. Considérer un objet comme connu,
2. Accepter ou refuser une certaine procédure pour construire des objets ou des solutions à des problèmes en géométrie
3. Et, par conséquent, recevoir un problème comme géométriquement resoluble ou comme résolu.

1. Considérer un objet comme connu,
2. Accepter ou refuser une certaine procédure pour construire des objets ou des solutions à des problèmes en géométrie
3. Et, par conséquent, recevoir un problème comme géométriquement resoluble ou comme résolu.

1. Considérer un objet comme connu,
2. Accepter ou refuser une certaine procédure pour construire des objets ou des solutions à des problèmes en géométrie
3. Et, par conséquent, recevoir un problème comme géométriquement resoluble ou comme résolu.

Le contexte de la Géométrie

Dans *La Géométrie* de Descartes, en particulier, les deux moments de la question sont entrelacés.

Comme la solution d'un problème mathématique est conçue par celui-ci en termes de construction d'un point ou d'un lieu par des courbes, sa reponse au problème de l'exactitude consiste dans la formulation d'un critère de récévabilité des courbes, à son tour fondé sur des contraintes au niveau de leur construction.

Le contexte de la Géométrie

Dans *La Géométrie* de Descartes, en particulier, les deux moments de la question sont entrelacés.
Comme la solution d'un problème mathématique est conçue par celui-ci en termes de construction d'un point ou d'un lieu par des courbes, sa reponse au problème de l'exactitude consiste dans la formulation d'un critère de récévabilité des courbes, à son tour fondé sur des contraintes au niveau de leur construction.

Mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est precis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas; et considérant la Geometrie comme une science, qui enseigne généralement à connoitre la mesure de tous les cors, on n'en doit pas plutot exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer etre descrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure.
(Descartes, La Géométrie, p. 316)

Sur cette base, nous pourrions distinguer:

Mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est precis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas; et considérant la Geometrie comme une science, qui enseigne généralement à connoitre la mesure de tous les cors, on n'en doit pas plutot exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer etre descrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure.
(Descartes, La Géométrie, p. 316)

Sur cette base, nous pourrions distinguer:

Mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est precis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas; et considérant la Geometrie comme une science, qui enseigne généralement à connoitre la mesure de tous les cors, on n'en doit pas plutot exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer etre descrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure.
(Descartes, La Géométrie, p. 316)

Sur cette base, nous pourrions distinguer:

Courbes géométriques et mécaniques

- Procédures de constructions exactes, qui engendrent des courbes géométriques: courbes tracés par des *mouvements continus coordonnés* (Bos, 2001) ou par des systèmes articulés qui peuvent être engendrés par *règle et compas réitéré* (Panza, 2005).
- Procédures de construction non exactes, qui engendrent des courbes mécaniques:

  la Spirale, la Quadratrice (...) n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques ... on les imagines déscrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement...
  (Descartes, La Géométrie, p. 317).

- cfr. Marco Panza, *Newton et les origines de l'analyse*, Blanchard (2005), Henk Bos, *Redefining geometrical exactness*, Springer (2001).

Courbes géométriques et mécaniques

- Procédures de constructions exactes, qui engendrent des courbes géométriques: courbes tracés par des *mouvements continus coordonnés* (Bos, 2001) ou par des systèmes articulés qui peuvent être engendrés par *règle et compas réitéré* (Panza, 2005).
- Procédures de construction non exactes, qui engendrent des courbes mécaniques:

la Spirale, la Quadratrice (...) n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques ... on les imagines déscrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement...
(Descartes, La Géométrie, p. 317).

- cfr. Marco Panza, *Newton et les origines de l'analyse*, Blanchard (2005), Henk Bos, *Redefining geometrical exactness*, Springer (2001).

Courbes géométriques et mécaniques

- Procédures de constructions exactes, qui engendrent des courbes géométriques: courbes tracés par des *mouvements continus coordonnés* (Bos, 2001) ou par des systèmes articulés qui peuvent être engendrés par *règle et compas réitéré* (Panza, 2005).
- Procédures de construction non exactes, qui engendrent des courbes mécaniques:

  la Spirale, la Quadratrice (...) n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques ... on les imagines déscrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement...
  (Descartes, La Géométrie, p. 317).

- cfr. Marco Panza, *Newton et les origines de l'analyse*, Blanchard (2005), Henk Bos, *Redefining geometrical exactness*, Springer (2001).

Courbes géométriques et mécaniques

- Procédures de constructions exactes, qui engendrent des courbes géométriques: courbes tracés par des *mouvements continus coordonnés* (Bos, 2001) ou par des systèmes articulés qui peuvent être engendrés par *règle et compas réitéré* (Panza, 2005).
- Procédures de construction non exactes, qui engendrent des courbes mécaniques:

  la Spirale, la Quadratrice (...) n'appartiennent véritablement qu'aux Méchaniques ... on les imagines déscrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement...
  (Descartes, La Géométrie, p. 317).

- cfr. Marco Panza, *Newton et les origines de l'analyse*, Blanchard (2005), Henk Bos, *Redefining geometrical exactness*, Springer (2001).

Solution cartésienne

Considérons maintenant la solution donnée par Descartes au problème de la quadrature du cercle:

- Procédure de construction à la règle et au compas (recevable).
- Procédure fondée sur un algorithme infini. Des générations de commentateurs ont souligné l'absence, dans la *Géométrie*, de procédures infinies ainsi que de méthodes infinitésimales, alors que Descartes non seulement n'ignorait pas l'existence de telles méthodes, mais il posséda lui même une certaine maîtrise des techniques infinitésimales.
- Une question qui se pose est de savoir si l'absence de toute référence aux dites méthodes dans la *Géométrie* soit dûe à leur irrécévabilité par rapport au critère d'exactitude y déployée (Vuillemin, Belaval), ou bien si le silence de Descartes soit dicté par d'autres raisons, par exemple d'ordre métaphysique (Costabel).

Solution cartésienne

Considérons maintenant la solution donnée par Descartes au problème de la quadrature du cercle:

- Procédure de construction à la règle et au compas (recevable).
- Procédure fondée sur un algorithme infini. Des générations de commentateurs ont souligné l'absence, dans la *Géométrie*, de procédures infinies ainsi que de méthodes infinitésimales, alors que Descartes non seulement n'ignorait pas l'existence de telles méthodes, mais il posséda lui même une certaine maîtrise des techniques infinitésimales.
- Une question qui se pose est de savoir si l'absence de toute référence aux dites méthodes dans la *Géométrie* soit dûe à leur irrécévabilité par rapport au critère d'exactitude y déployée (Vuillemin, Belaval), ou bien si le silence de Descartes soit dicté par d'autres raisons, par exemple d'ordre métaphysique (Costabel).

Solution cartésienne

Considérons maintenant la solution donnée par Descartes au problème de la quadrature du cercle:

- Procédure de construction à la règle et au compas (recevable).
- Procédure fondée sur un algorithme infini. Des générations de commentateurs ont souligné l'absence, dans la *Géométrie*, de procédures infinies ainsi que de méthodes infinitésimales, alors que Descartes non seulement n'ignorait pas l'existence de telles méthodes, mais il posséda lui même une certaine maîtrise des techniques infinitésimales.
- Une question qui se pose est de savoir si l'absence de toute référence aux dites méthodes dans la *Géométrie* soit dûe à leur irrécévabilité par rapport au critère d'exactitude y déployée (Vuillemin, Belaval), ou bien si le silence de Descartes soit dicté par d'autres raisons, par exemple d'ordre métaphysique (Costabel).

- A première vue la construction déployée dans le fragment sur la quadrature du cercle pourrait être jugée approximée, et donc *non exacte*.

Néanmoins cette conclusion, bien que *prima facie* condivisible, invoque une justification: pour quelle raison cette procédure ne se conforme pas au critère de recevabilité précédemment exposé, qui dépend de méthodes d'engendrement de courbe?

- A première vue la construction déployée dans le fragment sur la quadrature du cercle pourrait être jugée approximée, et donc *non exacte*.

Néanmoins cette conclusion, bien que *prima facie* condivisible, invoque une justification: pour quelle raison cette procédure ne se conforme pas au critère de recevabilité précédemment exposé, qui dépend de méthodes d'engendrement de courbe?

- A première vue la construction déployée dans le fragment sur la quadrature du cercle pourrait être jugée approximée, et donc *non exacte*.

Néanmoins cette conclusion, bien que *prima facie* condivisible, invoque une justification: pour quelle raison cette procédure ne se conforme pas au critère de recevabilité précédemment exposé, qui dépend de méthodes d'engendrement de courbe?

Constructions point par point

- Cette question est davantage légitime lorsque on observe que d'autres méthodes de construction de courbes, admis dans la *Géométrie*, peuvent être considérés *approximées* ou de toute façon moins exactes par rapport aux constructions par règle et compas reitéré ou par mouvement continu coordonné:
- Au premier et deuxième livre de la *Géométrie*, Descartes montre comment une courbe peut être construite, à partir d'une équation, en déterminant un réseau dense de points par lesquels elle doit passer. Ensuite, au deuxième livre, Descartes accepte cette méthode comme méthode de construction purement géométrique (C'est le cas de la construction des ovales. cfr *La Géométrie*, p.352, 353).

Constructions point par point

- Cette question est davantage légitime lorsque on observe que d'autres méthodes de construction de courbes, admis dans la *Géométrie*, peuvent être considérés *approximées* ou de toute façon moins exactes par rapport aux constructions par règle et compas reitéré ou par mouvement continu coordonné:
- Au premier et deuxième livre de la *Géométrie*, Descartes montre comment une courbe peut être construite, à partir d'une équation, en déterminant un réseau dense de points par lesquels elle doit passer. Ensuite, au deuxième livre, Descartes accepte cette méthode comme méthode de construction purement géométrique (C'est le cas de la construction des ovales. cfr *La Géométrie*, p.352, 353).

Critiques

- Descartes devait avoir à l'esprit, lorsque il traita de ce type de construction, les remarques des certains mathématiciens qui avaient critiqué cette méthode de construction comme *approximée*parce qu'elle n'offrait pas la courbe dans sa totalité, au contraire d' un acte de mouvement qui donnerait la totalité des points d'une courbe sans laisser des troux dans son tracé (ainsi Kepler critiqua, par exemple, la construction point par point des coniques),
- ou bien comme dernière ressource quand aucun autre moyen de construction n'est disponible (ainsi Snellius).

Critiques

- Descartes devait avoir à l'esprit, lorsque il traita de ce type de construction, les remarques des certains mathématiciens qui avaient critiqué cette méthode de construction comme *approximée*parce qu'elle n'offrait pas la courbe dans sa totalité, au contraire d' un acte de mouvement qui donnerait la totalité des points d'une courbe sans laisser des troux dans son tracé (ainsi Kepler critiqua, par exemple, la construction point par point des coniques),
- ou bien comme dernière ressource quand aucun autre moyen de construction n'est disponible (ainsi Snellius).

Constructions génériques et spécifiques

- Problème: sur quel fondement donc Descartes s'appuie-t-il pour déduire la non recevabilité de sa procédure de quadrature, et en même temps la recevabilité de sa procédure de construction point par point des courbes?
- Pour repondre à cette question, je commencerai par montrer que en traitant des constructions point par point, Descartes distingue deux façons de construire une courbe: Constructions point par point génériques et spécifiques.

Constructions génériques et spécifiques

- Problème: sur quel fondement donc Descartes s'appuie-t-il pour déduire la non recevabilité de sa procédure de quadrature, et en même temps la recevabilité de sa procédure de construction point par point des courbes?
- Pour repondre à cette question, je commencerai par montrer que en traitant des constructions point par point, Descartes distingue deux façons de construire une courbe: Constructions point par point génériques et spécifiques.

Descartes distingue (Descartes, *La Géométrie*, p. 339-340):

- *Construction générique* (Henk Bos, 2001): exemplifiée entre autres par la construction des ovales, permet de construire indifféremment n'importe que point de la courbe.
- *Construction spécifique* (Henk Bos, 2001): elle n'offre qu'un sous-ensemble des points de la courbe, obtenus par des moyens plus simples que ceux demandés pour sa construction:

  par cete dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, et ainsi a proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est à dire pas un de ceux qui luy sont tellement propres qu'ils ne puissent etre trouvés que par elle.

Descartes distingue (Descartes, *La Géométrie*, p. 339-340):

- *Construction générique* (Henk Bos, 2001): exemplifiée entre autres par la construction des ovales, permet de construire indifféremment n'importe que point de la courbe.
- *Construction spécifique* (Henk Bos, 2001): elle n'offre qu'un sous-ensemble des points de la courbe, obtenus par des moyens plus simples que ceux demandés pour sa construction:

par cete dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, et ainsi a proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est à dire pas un de ceux qui luy sont tellement propres qu'ils ne puissent etre trouvés que par elle.

Descartes distingue (Descartes, *La Géométrie*, p. 339-340):

- *Construction générique* (Henk Bos, 2001): exemplifiée entre autres par la construction des ovales, permet de construire indifféremment n'importe que point de la courbe.
- *Construction spécifique* (Henk Bos, 2001): elle n'offre qu'un sous-ensemble des points de la courbe, obtenus par des moyens plus simples que ceux demandés pour sa construction:

  par cete dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, et ainsi a proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est à dire pas un de ceux qui luy sont tellement propres qu'ils ne puissent etre trouvés que par elle.

Constructions spécifiques

Descartes, tout en faisant allusion à une méthode dont on se sert *pour la spirale et ses semblables*, ne donne dans la *Géométrie* aucun exemple de construction spécifique. Des exemples peuvent pourtant être trouvés dans sa corréspondance. Ainsi, on lit dans une lettre de 1629 adresée à Mersenne:

> *Car, encore qu'on puisse trouver une infinité de points par ou passe l'helice & la quadratrice; toutefois on ne peut pas trouver geometriquement aucun de poins qui sont necessaires pour les effaits desirés tant de l'une et tant de l'autre...*
> *(Descartes à Mersenne, 13 novembre 1629)*

- Descartes avait-il à l'esprit une construction point par point *spécifique* de l'hélice et de la quadratrice?

Clavius

- Une construction point par point de la quadratrice est offerte par Clavius dans le VI livre de ses *Commentaria* aux Elements d'Euclide, publiés en 1598 (le texte spécifique fut reédité dans la *Geometria practica* de 1604).

Dans les mots de Clavius (ma traduction):
Donc, on décrira la courbe quadratrice géométriquement de cette manière. L'arc BD soit divisé en tant de parties égales, et un de deux autres côtés AD, BC en autant de parties égales. Cette division sera très simple, si soit l'arc DB soit l'un de deux côtés AD, BC est premièrement bissecté, et ensuite, chaque partie est de nouveau bissectée, et ainsi de suite, autant que l'on voudra.
(Clavius, Geometria Practica, p. 321.).

Clavius

- Une construction point par point de la quadratrice est offerte par Clavius dans le VI livre de ses *Commentaria* aux Elements d'Euclide, publiés en 1598 (le texte spécifique fut reédité dans la *Geometria practica* de 1604).

  Dans les mots de Clavius (ma traduction):
  Donc, on décrira la courbe quadratrice géométriquement de cette manière. L'arc BD soit divisé en tant de parties égales, et un de deux autres côtés AD, BC en autant de parties égales. Cette division sera très simple, si soit l'arc DB soit l'un de deux côtés AD, BC est premièrement bissecté, et ensuite, chaque partie est de nouveau bissectée, et ainsi de suite, autant que l'on voudra. (Clavius, Geometria Practica, p. 321.).

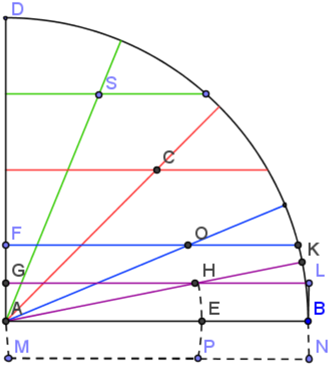


Fig.4

- Clavius déclare offrir une construction de la quadratrice plus précise et géométrique que celle presentée dans la *Collection* de Pappus.
- En fait, cette construction offrirait le point d'intersection entre quadratrice et axe, en répondant à l'objection de Sporus, relatée par Pappus, selon laquelle le point où la ligne coupe la droite AD ne peut pas être trouvé puisque les deux axes qui engendrent la quadratrice se superposent en touchant la base (cfr. Pappus, *La collection mathématique*, p. 193).

- Clavius déclare offrir une construction de la quadratrice plus précise et géométrique que celle presentée dans la *Collection* de Pappus.
- En fait, cette construction offrirait le point d'intersection entre quadratrice et axe, en répondant à l'objection de Sporus, relatée par Pappus, selon laquelle le point où la ligne coupe la droite AD ne peut pas être trouvé puisque les deux axes qui engendrent la quadratrice se superposent en touchant la base (cfr. Pappus, *La collection mathématique*, p. 193).

- Cependant, pour construire le point d'intersection, Clavius doit recourir à une astuce. Il demande de continuer la procédure de divisions successives de l'arc et du segment au dessous de la base AB jusqu'à obtenir des segments suffisamment prooches l'un à l'autre pour construire un point tellement près du point E que leur distance ne soit pas perceptible à travers les sens:

... sed quia punctum E, in latere AB, invenire geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: ut illud sine notabili errore, quiscilicet sub sensum cadat, reperiamur ....
puisque le point E, sur le côté AB ne peut pas être trouvé géométriquement, puisque là bas toute intersection des deux droites s'arrête, on le trouvera sans erreur remarquable, à savoir, sans erreur qui peut être perçu à travers les sens....

- Cependant, pour construire le point d'intersection, Clavius doit recourir à une astuce. Il demande de continuer la procédure de divisions successives de l'arc et du segment au dessous de la base AB jusqu'à obtenir des segments suffisamment prooches l'un à l'autre pour construire un point tellement près du point E que leur distance ne soit pas perceptible à travers les sens:

  ... sed quia punctum E, in latere AB, invenire geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: ut illud sine notabili errore, quiscilicet sub sensum cadat, reperiamur ....
  puisque le point E, sur le côté AB ne peut pas être trouvé géométriquement, puisque là bas toute intersection des deux droites s'arrête, on le trouvera sans erreur remarquable, à savoir, sans erreur qui peut être perçu à travers les sens....

- En 1629 Descartes écrivait que, parmi les points de la quadratrice qui ne peuvent pas être trouvés géométriquement, il y a ceux ... *nécéssaires pour les effets désirés ...*

Comme la quadrature du cercle pourrait être inclue parmi les effets de la quadratrice, on peut inférer que Descartes ait voulu souligner que le point E d'intersection entre quadratrice et axe, réquis afin d'établir la proportion qui donne la quadrature du cercle (dans Pappus), ne saurait pas être constructible par règle et compas.

- En 1629 Descartes écrivait que, parmi les points de la quadratrice qui ne peuvent pas être trouvés géométriquement, il y a ceux ... *nécéssaires pour les effets désirés ...*

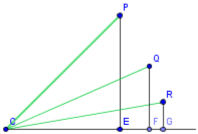
Comme la quadrature du cercle pourrait être inclue parmi les effets de la quadratrice, on peut inférer que Descartes ait voulu souligner que le point E d'intersection entre quadratrice et axe, réquis afin d'établir la proportion qui donne la quadrature du cercle (dans Pappus), ne saurait pas être constructible par règle et compas.

- En 1629 Descartes écrivait que, parmi les points de la quadratrice qui ne peuvent pas être trouvés géométriquement, il y a ceux ... *nécéssaires pour les effets désirés ...*

Comme la quadrature du cercle pourrait être inclue parmi les effets de la quadratrice, on peut inférer que Descartes ait voulu souligner que le point E d'intersection entre quadratrice et axe, réquis afin d'établir la proportion qui donne la quadrature du cercle (dans Pappus), ne saurait pas être constructible par règle et compas.

Analogies

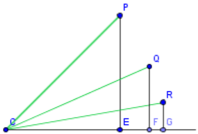
- Observons aussi que la construction de Clavius est étroitement liée au fragment cartésien sur la quadrature du cercle.



- Comme on a que EO = QF=1/2EP, que l'angle QCF = 1/2PCF, et que EP est perpendiculaire à CF, la suite des points F, G, H...peut être construite par des bissections successives de l'angle de départ et du côté EP.

Analogies

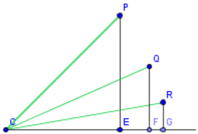
- Observons aussi que la construction de Clavius est étroitement liée au fragment cartésien sur la quadrature du cercle.



- Comme on a que EO = QF=1/2EP, que l'angle QCF = 1/2PCF, et que EP est perpendiculaire à CF, la suite des points F, G, H...peut être construite par des bissections successives de l'angle de départ et du côté EP.

Analogies

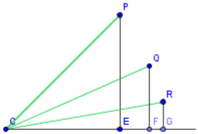
- Observons aussi que la construction de Clavius est étroitement liée au fragment cartésien sur la quadrature du cercle.



- Comme on a que EO = QF=1/2EP, que l'angle QCF = 1/2PCF, et que EP est perpendiculaire à CF, la suite des points F, G, H...peut être construite par des bissections successives de l'angle de départ et du côté EP.

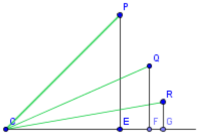
- Cette observation est encore dûe à Euler (ma traduction)

Il serait utile de noter que les points P, Q, R, S, x sont situés sur la quadratrice de l'antiquité, parce que les segments EP, FQ, GR, HS ont le même rapport l'un entre l'autre que les angles ECP, FCQ, GCR, HCS... Et puisque x est le point où cette courbe intercepte la base (...) la construction de Descartes est en grand accord avec la quadrature des anciens...
(Euler, Annotationes.)



- Cette observation est encore dûe à Euler (ma traduction)

Il serait utile de noter que les points P, Q, R, S, x sont situés sur la quadratrice de l'antiquité, parce que les segments EP, FQ, GR, HS ont le même rapport l'un entre l'autre que les angles ECP, FCQ, GCR, HCS... Et puisque x est le point où cette courbe intercepte la base (...) la construction de Descartes est en grand accord avec la quadrature des anciens...
(Euler, Annotationes.)



...et différences

Néanmoins:

- Clavius détermine E en construisant, par l'application de la procédure expliquée dessus, un point qui s'approche tellement au premier point que la distance entre les deux tombe au dessous de notre seuil de perception,
- alors que dans le fragment de Descartes la procédure de construction du point x, diamètre du cercle de périmètre donné, ne s'arrête pas à un seuil physique de perception: la distance entre le point x et le point qui donne l'apothème du polygone régulier à 2^n cotés peut être toujours raccourcie: il suffit, en théorie, de reiterer la meme procédure pour obtenir l'apothème du polygone de cotés doubles du précédent.

...et différences

Néanmoins:

- Clavius détermine E en construisant, par l'application de la procédure expliquée dessus, un point qui s'approche tellement au premier point que la distance entre les deux tombe au dessous de notre seuil de perception,
- alors que dans le fragment de Descartes la procédure de construction du point x, diamètre du cercle de périmètre donné, ne s'arrête pas à un seuil physique de perception: la distance entre le point x et le point qui donne l'apothème du polygone régulier à 2^n cotés peut être toujours raccourcie: il suffit, en théorie, de reiterer la meme procédure pour obtenir l'apothème du polygone de cotés doubles du précédent.

Détermination par procédure exacte

- On peut maintenant préciser la solution cartésienne au problème de l'exactitude, en spécifiant que un objet est *déterminé par une procédure exacte*si:
- (i) il s'agit d'une courbe engendrée par un mouvement continu coordonné ou par règle et compas reitéré;
- (ii), dans le cas d'un point appartenant à un lieu, s'il est construit par intersection entre deux courbes construites par règle et compas reitéré, à partir d'un point arbitrairement choisi sur une droite. Cette dernière condition est équivalente à la suivante: un point est déterminé exactement s'il peut être relié par une chaîne finie de constructions par règle et compas reitéré à un point arbitrairement choisi (comme dans l'exemple des ovales).

Détermination par procédure exacte

- On peut maintenant préciser la solution cartésienne au problème de l'exactitude, en spécifiant que un objet est *déterminé par une procédure exacte*si:
- (i) il s'agit d'une courbe engendrée par un mouvement continu coordonné ou par règle et compas reitéré;
- (ii), dans le cas d'un point appartenant à un lieu, s'il est construit par intersection entre deux courbes construites par règle et compas reitéré, à partir d'un point arbitrairement choisi sur une droite. Cette dernière condition est équivalente à la suivante: un point est déterminé exactement s'il peut être relié par une chaîne finie de constructions par règle et compas reitéré à un point arbitrairement choisi (comme dans l'exemple des ovales).

Détermination par procédure exacte

- On peut maintenant préciser la solution cartésienne au problème de l'exactitude, en spécifiant que un objet est *déterminé par une procédure exacte*si:
- (i) il s'agit d'une courbe engendrée par un mouvement continu coordonné ou par règle et compas reitéré;
- (ii), dans le cas d'un point appartenant à un lieu, s'il est construit par intersection entre deux courbes construites par règle et compas reitéré, à partir d'un point arbitrairement choisi sur une droite. Cette dernière condition est équivalente à la suivante: un point est déterminé exactement s'il peut être relié par une chaîne finie de constructions par règle et compas reitéré à un point arbitrairement choisi (comme dans l'exemple des ovales).

Conséquences

- Le caractère infini du procédé d'approximation qui figure dans le fragment sur la quadrature du cercle est fondamentale pour saisir la distinction entre les deux façons de construire une courbe point par point.
- Dans le fragment sur la quadrature du cercle, le point x qui donne le diamètre du cercle isopérimètre au carré donné n'est pas déterminé exactement par la procédure de bissection successive du segment EP et de l'angle PCF, même si cette procédure est fondée sur l'emploi de la règle et du compas.
- Ni, par conséquent, le point d'intersection entre quadratrice et base dans la construction point par point donnée par Clavius sera déterminé exactement (*contra* Clavius?).

Conséquences

- Le caractère infini du procédé d'approximation qui figure dans le fragment sur la quadrature du cercle est fondamentale pour saisir la distinction entre les deux façons de construire une courbe point par point.
- Dans le fragment sur la quadrature du cercle, le point x qui donne le diamètre du cercle isopérimètre au carré donné n'est pas déterminé exactement par la procédure de bissection successive du segment EP et de l'angle PCF, même si cette procédure est fondée sur l'emploi de la règle et du compas.
- Ni, par conséquent, le point d'intersection entre quadratrice et base dans la construction point par point donnée par Clavius sera déterminé exactement (*contra* Clavius?).

Conséquences

- Le caractère infini du procédé d'approximation qui figure dans le fragment sur la quadrature du cercle est fondamentale pour saisir la distinction entre les deux façons de construire une courbe point par point.
- Dans le fragment sur la quadrature du cercle, le point x qui donne le diamètre du cercle isopérimètre au carré donné n'est pas déterminé exactement par la procédure de bissection successive du segment EP et de l'angle PCF, même si cette procédure est fondée sur l'emploi de la règle et du compas.
- Ni, par conséquent, le point d'intersection entre quadratrice et base dans la construction point par point donnée par Clavius sera déterminé exactement (*contra* Clavius?).

En sorte de conclusion...

- Parmi les solutions du problème de la quadrature du cercle connues à Descartes, aucune aurait pu être acceptée comme géométrique, si on considère le standard d'exactitude déployé dans la *Géométrie*.
- Cette conclusion, il est à noter, n'explique pas pourquoi Descartes considérait ce problème impossible, mais elle contribue à éclairer la signification du terme dans le contexte de la pratique cartésienne de solution de problèmes. *Impossibilité donc, non pas comme absence de solution tout court, mais comme absence de solution fondée sur une procédure conforme à un idéal d'exactitude, et donc, de géométricité.*

En sorte de conclusion...

- Parmi les solutions du problème de la quadrature du cercle connues à Descartes, aucune aurait pu être acceptée comme géométrique, si on considère le standard d'exactitude déployé dans la *Géométrie*.
- Cette conclusion, il est à noter, n'explique pas pourquoi Descartes considérait ce problème impossible, mais elle contribue à éclairer la signification du terme dans le contexte de la pratique cartésienne de solution de problèmes. *Impossibilité donc, non pas comme absence de solution tout court, mais comme absence de solution fondée sur une procédure conforme à un idéal d'exactitude, et donc, de géométricité.*

For Further Reading I

- Archimède, *La Mesure du Cercle*, tr. Ver Ecke, dans Archimède, *Oeuvres Complètes* vol I, pp. 127.
- Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, Sprnger, 2001.
- Henk J. M. Bos, *On the representation of curves in Descartes' Geometry*, Archive for History of Exact Sciences, 24: 295-338, 1981.
- Cristophorus Clavius, editeur. *Elementorum Libri XV accessit XVI de solidorum regolarium cuiuslibet intra quodlibet comparatione* [...]. apud Sanctium & Soc., Romae, 1589.
- Cristophorus Clavius, *Geometria Practica*, apud Typographeo Ioannis Albini, Moguntia, 1606.
- Federicus Commandinus, editor. *Pappus Alexandrini Mathematiccollectiones a Federico Commandino [. . .] in latini conversae[. . .]*. apud H. Concordiam, Pisauri, 1588.
- René Descartes, *Discours de la methode [...]. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie qui sont des essaies de cette Methode*. I. Maire, Leyde, 1637.

For Further Reading II

- René Descartes, *Oeuvres de Descartes*. Vrin, Paris, 1897-1910. Editées par C. Adam and P. Tannery. 12 volumes.
- Leonhard Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem*, dans *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1763, pp. 157-168. Aussi dans: Euler, *Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 1 - 15.
- Paolo Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, Oxford University Press, 1996.
- Marin Mersenne, *Les Questions Théologiques, Physiques, Morales et Mathématiques*, Henry Guenon. Reédité en *Questions inouies*, 1634/1985.
- Pappus. *Pappi Alexandrini Collectionis [...]*. Weidmann, Berolini, 1876-1878. 3 vols. Editées avec une traduction latine et un commentaire par F. Hultsch.13
- Pappus, *La Collection Mathématique*, Desclée de Brouwer, 1933, tr; française par Ver Eecke P..
- Marco Panza, *Newton et les Origines de l'Analyse*, Blanchard, 2005.

For Further Reading III

- Marco Panza, *Manuscrit*, non publié.
- Chikara Sasaki, *Descartes' Mathematical thought*, Boston Studies ib the Philosophy of Science 237. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- Paul Ver Ecke, *Archimède, Oeuvres Complètes*, 2 tomes, Vaillant Carmanne, Liège, 1960 (première édition 1921).