LA PREUVE CARTESIENNE DE LA QUADRATURE DU CERCLE

Université Paris VII - REHSEIS

27 Avril 2009

1 La question de la quadrature du cercle

1.0.1 Mersenne, Questions *théologiques*:

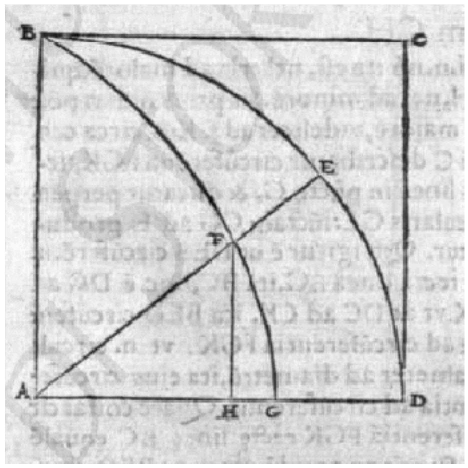
Cette question est extremement difficile, car l'on trouve des excellents géomètres qui tiennent qu'il n'est pas possible de trouver un quarré, dont la surface soit égale à celle du cercle, et d'autres qui tiennent le contraire (...) Quant à la quadrature du cercle, nul n'a démonstré qu'elle soit possible, ou impossible ; ce qui donne à plusieurs de ne perdre pas l'éspérance de la rencontrer (...)

(M. Mersenne, *Les Questions Théologiques, Physiques, Morales et Mathématiques*, Henry Guenon. Reédité en *Questions inouies*, 1634/1985).

1.0.2 Descartes à Mersenne, 31 mars 1638:

> Mais, pour les questions de Geometrie qu'ils ne peuvent soudre & croient ne pouvoir estre resolues par ma methode, qu'ils vous prometent de me proposer, ie trouve que c'est un parti qui m'est desavantageux. Car premierement, c'est contre le style des Geometres de proposer aux autres des questions qu'ils ne peuvent soudre eux memes. Puis, il y en a d'impossibles, comme la quadrature du cercle &c.; il y en a d'autres qui, bien qu'ils soient possibles, sont toutefois au delà des colonnes que j'ay posees, non à cause qu'il faut d'autres regles ou plus d'esprit, mais a cause qu'il faut plus de trauail (...) Enfin il y en a qui appartiennent à l'arithmetique et non a la Geometrie, comme celles de Diophante ...
>
> (Dans AT, vol. II, p. 91)

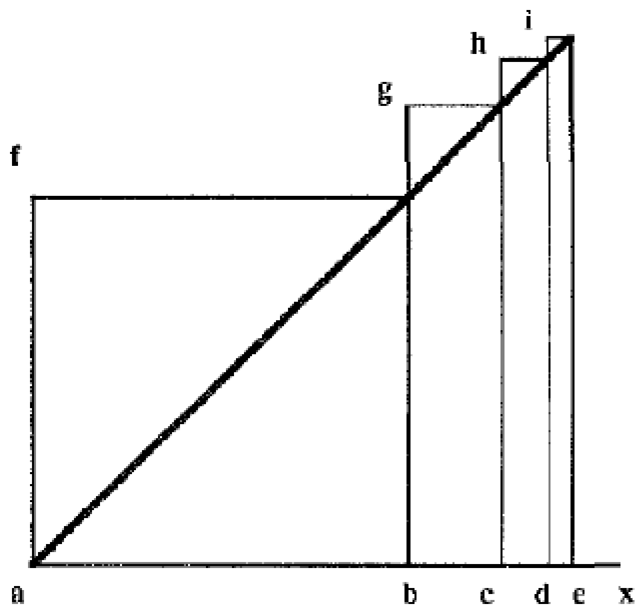
1.0.3 La quadratrice dans Pappus:



Posons un carré ABCD et décrivons l'arc BED autour du centre A. Faisons mouvoir la droite Ab de telle sorte que, le point A restant fixe, le point B se déplace suivant l'arc BED, et que la droite BC, se maintenant toujours parallèle à la droite AD, accompagne le point B qui se déplace suivant la droite AB. De plus, que la droite AB, se mouvant d'une manière uniforme, parcoure l'angle comrpis sous les droites BA, AD, c'est à dire que le point B parcoure l'arc BED dans le même temps que la droite BC se déplace le long de la droite BA, c'est à dire que le point B se déplace suivant la droite BA. Il se fera évidemment que les droites AB et BC coincideront simultanément l'une et l'autre avec la droite AD. En conséquence, un tel mouvement ayant lieu, les droites AB, BC se couperont mutuellement en un point qui est continuellement transporté avec elles, lequel décrira une ligne concave d'une même côté, tel que BZH, dans l'espace comrpis entre les droites BA, AD et l'arc BED; ligne qui paraît commode pour trouver un carré équivalent à un cercle donné.

(Pappus, *La collection mathématique*, tr. P. Ver Ecke, p. 192)

2 Le fragment cartésien



CIRCULI QUADRATIO. Ad quadrandum circulum nihil aptius invenio quam si dato quadrato bf adiungatur rectangulum cg comprehensum sub lineis ac & cb,quod sit aequale quartae parti precedentis; item rectangulum dh, factum ex lineis da, dc aequale quartae parti precedentis; & eodem modo rectangulum ei, atque alia infinita usque ad x; quae omnia simul aequanbantur tertiae parti quadrati bf. Et haec linea ax erit diameter circuli, cujus circonferentia aequalis est circumferentiae huius quadrati bf, est autem ac diameter circuli octagono, quadrato bf isoperimetro, inscripti; ad diameter circuli inscripti figurae 16 laterum, ae diameter circuli inscripti figurae 32 laterum, quadrato bf isoperimetrae, & sic in infinitum[1].

(Descartes AT, vol. X, p. 304)

[1]"LA QUADRATURE DU CERCLE. Pour carrer le cercle, je ne trouve rien de plus apte que, étant donné un carré *bf*, d'ajouter le rectangle *cg* délimité par les lignes *ac* et *cb*, égale à $\frac{1}{4}$ de la figure précédente; et ensuite le rectangle *dh*, formé par les segments *da*, *dc* égale à la quatrième partie du précédent, et dans la même manière d'ajouter le rectangle *ei*, et d'autres infinis jusqu'à atteindre le point x. Tous ensembles, ils feront la troisième partie du carré *bf*. Et cette ligne *ax* sera le diamètre du cercle, dont la circonférence est égale au périmètre [circumferentia] de ce carré *bf*. D'autre part, *ac* est le diamètre du cercle inscrit dans l'octagone isopérimètre au carré *bf*, *ad* le diamètre inscrit à la figure de 16 côtés, *ae* le diamètre du cercle inscrit à la figure de 32 côtés, isopérimètre au carré *bf*; et ainsi à l'infini."

2.0.4 Archimède: La Mesure du Cercle

> Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

(Archimède, *De la Mesure du Cercle,* tr. Ver Ecke, dans *Oeuvres Complètes* vol I, p. 127)

2.1 Discussion de la démonstration cartésienne

2.1.1 Sur la solution donnée par Descartes:

> Constructio quaedam geometrica promptissime ad circuli veram dimensionem appropinquans, sed quae sive Cartesius ipse eam invenuerit, sive ab alio habuerit communicatam, acutissimum inventoris ingenium, illo praesertim tempore, luculenter declarat[2].
>
> (Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circulum quadraturam spectantem,* (E275). Publié originellement dans *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae* **8,** 1763. Aussi dans *Opera Omnia*, Série 1, vol. 15, pp., 1-15)

2.1.2 Problème énoncé par Euler

> Dato circulo, cui polygonum ....que sit circumscriptum, invenire circulum alium, cui si polygonum regulare duplo plurium laterum circumscribatur, perimeter huius polygoni aequalis sit futura perimetro illius polygoni[3].
>
> (Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circulum quadraturam spectantem,* (E275). Publié originellement dans *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae* **8,** 1763. Aussi dans *Opera Omnia*, Série 1, vol. 15, pp., 1-15).

2.1.3 Solution.

> Sit ENM circulus datus et EP semilatus polygoni ipsi circumscripti, centro existente in C; CF autem sit radius circuli quaesiti, et FQ semilatus polygoni ipsi circumscribendi. Necesse ergo est, ut sit FQ semissis ipsius EP, et angulus FCQ, semissis anguli ECP. Quare recta CQ angulum ECP, et recta QO ipsi CE parallela lineam EP bisecabit...[4].

[2] "Une construction géométrique, qui s'approche très rapidement la véritable longueur du cercle, et qui, soit elle a été découverte par Descartes, soit elle a été communiquée à lui par quelqu'un d'autre, déclare de manière évidente l'intelligence très aigue de l'auteur, spécialmeent dans ces temps là".

[3] "Problème. Etant donné un cercle auquel soit exinscrit un polygône, trouver un autre cercle, tel que, si un polygône regulier est exinscrit dont les côtés sont le double du premier (dont les côtés sont majeures en raison du double), le perimètre de ce polygône soit égale au perimètre de l'autre polygône".

[4] "Solution. Soit ENM un cercle donné, et EP le demi côté du polygône exinscrit, de centre en C. Soit CF le rayon du cercle demandé, et FQ le demi-côté du polygône à exinscrire. Il est

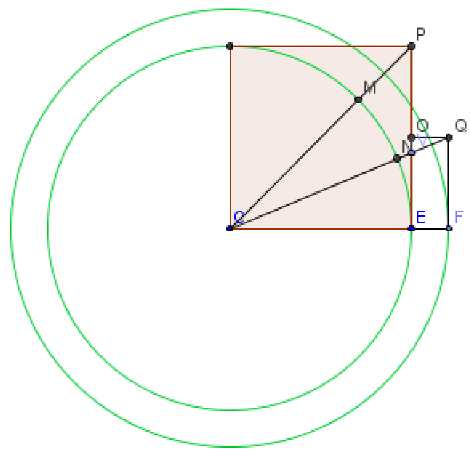


Fig. 2

cum nunc sit $EV : CE = EQ : CF$

et $EV : CE = EP : CE + CP$[5]

erit $FQ : CF = EP : CE + CP$

sed quia $FQ = \frac{1}{2}EP$, erit etiam $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. Hinc auferatur CF[6] et habebitur $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$ ex quo erit rectangulum $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$, ideoque punctum F ita definiri debet, ut sit rectangulum, sub CF et EF comprehensum, aequale parti quartae quadrati rectae EP, seu ipsi quadrato rectae FQ[7].

(Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circulum quadraturam spectantem,* (E275). Publié originellement dans *Novi Commentarii Academiae sci-*

---

donc nécessaire que FQ soit la moitié du même EP, et l'angle FCQ la bissectrice de l'angle ECP. Pour cela, CQ bissectera l'angle ECP et la recte QO, parallèle à CE, bisectera la recte EP".

[5]Il faut considérer: $\frac{EV}{CE} = \tan ECV$; $\frac{EP}{CE} = \tan 2ECV$; $\frac{EP}{CP} = \sin 2ECV$. Or, par la formule de duplication de la tangente on aura: $\tan 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1-\tan^2 ECV}$, et $\sin 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1+\tan^2 ECV}$. En posant $\tan ECV = t$ on aura: $\frac{EP}{CE} = \frac{2t}{1-t^2}$, $\frac{EP}{CP} = \frac{2t}{1+t^2}$. Par conséquent: $\frac{CE+CP}{EP} = \frac{1-t^2+1+t^2}{2t} = \frac{1}{t} = \frac{CE}{EV}$.

[6]CF est dans l'original. En vérité il faut enlever CE, afin d'obtenir: $CF - CE = \frac{1}{2}CP + \frac{1}{2}CE - CE = \frac{1}{2}(CP - CE)$, et donc le résultat établi plus en bas.

[7]"puisque donc c'est $EV : CE = EQ : CF$, et $EV : CE = EP : CE + CP$, on aura: $FQ : CF = EP : CE + CP$. Mais, puisque $FQ = \frac{1}{2}EP$, on aura même $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. D'ici sera enlevé CF et on aura $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$ duquel on aura le rectangle: $CF.EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$, et ainsi, le point F devra être défini de telle manière que le rectangle compris entre CF et EF soit égale à la quatrième partie du carré construit sur la droite EP, ou égale au même carré sur la droite FQ".

entiarum Petropolitanae **8,** 1763. Aussi dans *Opera Omnia*, Série 1, vol. 15, pp., 1-15).

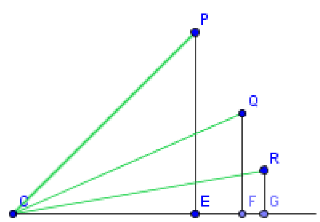
2.1.4 Construction cartésienne

Sit iam CE radius circuli quadrato inscripti, CF octagono inscripti, CG polygono regulari 16 laterum, CH polygono 32 laterum et ita porro. Sit porro EP semilatus quadrati, FQ semilatus octagoni, GR polygoni 16, HS polygoni 32 laterum, etc..., et quia polygona eiusdem perimetri assumuntur, erit $\mathrm{FQ} = \frac{1}{2}\mathrm{EP}$; $\mathrm{GR} = \frac{1}{2}\mathrm{FQ} = \frac{1}{4}\mathrm{EP}$; $\mathrm{HS} = \frac{1}{2}\mathrm{GR} = \frac{1}{4}\mathrm{FQ} = \frac{1}{8}\mathrm{EP}$ etc...Iam ex problemate premisso est $\mathrm{CF.EF} = \frac{1}{4}\mathrm{EP}^2 = \mathrm{FQ}^2$; tum vero ex eodem simili modo:

$\mathrm{CG.FG} = \frac{1}{4}\mathrm{FQ}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{CF.EF} = \mathrm{GR}^2$.

$\mathrm{CH.GH} = \frac{1}{4}\mathrm{GR}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{CG.FG} = \mathrm{HS}^2$,

sicque puncta F, G, H etc. eodem plano modo determinantur, uti habet constructio Cartesiana...[8].



(Euler, *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circulum quadraturam spectantem,* (E275). Publié originellement dans *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae* **8,** 1763. Aussi dans *Opera Omnia*, Série 1, vol. 15, pp., 1-15).

[8]"Soit donc CE le rayon du cercle inscrit au carré, CF celui du cercle inscrit à l'octagone, CG le rayon inscrit au polygone régulier à 16 côtés, Ch au polygône à 32 côtés et ainsi de suite. Soit donc EP le démi côté du carré, FQ le demi côté de l'octagone, GR du polygone à 16, HS du polygone à 32 coté, etc ... et puisque on a assumé que les polygone ont même périmètre, on aura $\mathrm{FQ} = \frac{1}{2}\mathrm{EP}$; $\mathrm{GR} = \frac{1}{2}\mathrm{FQ} = \frac{1}{4}\mathrm{EP}$; $\mathrm{HS} = \frac{1}{2}\mathrm{GR} = \frac{1}{4}\mathrm{FQ} = \frac{1}{8}\mathrm{EP}$ etc... Et d'après le problème précédent, sera: $\mathrm{CF.EF} = \frac{1}{4}\mathrm{EP}^2 = \mathrm{FQ}^2$. Et donc, de manière similaire:

$\mathrm{CG.FG} = \frac{1}{4}\mathrm{FQ}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{CF.EF} = \mathrm{GR}^2$.

$\mathrm{CH.GH} = \frac{1}{4}\mathrm{GR}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{CG.FG} = \mathrm{HS}^2$,

et ainsi les points F, G, H etc. sont déterminés clairement dans la même manière, comme la construction cartésienne les obtient..."

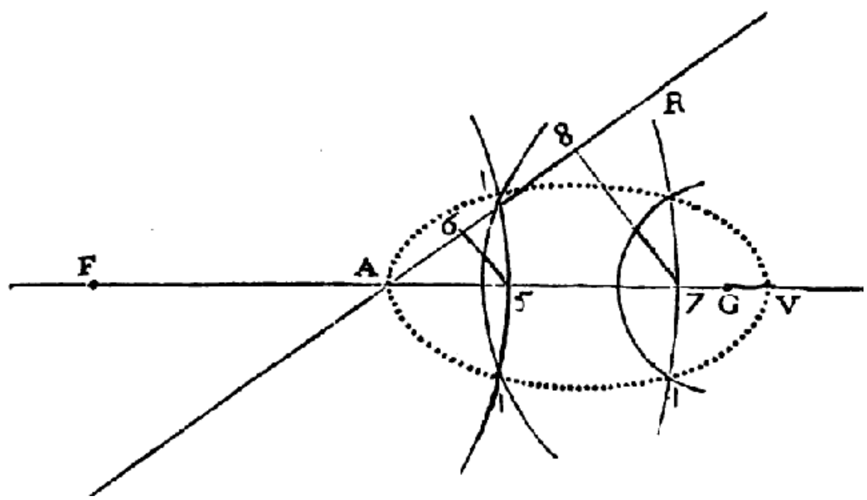
3 Le problème de l'exactitude

3.1 Critère de recevabilité.

Mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est precis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas; et considérant la Geometrie comme une science, qui enseigne généralement à connoitre la mesure de tous les cors, on n'en doit pas plutot exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer etre descrites par un mouvement continu ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement reglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure.

(Descartes, *La Géométrie*, p.316)

3.1.1 Construction point par point des ovales



Premierement ayant tiré les lignes droites FA et AR, qui s'entrecouppent au point A, sans qu'il importe a quels angles, ie prens en l'une le point F a discretion, c'est a dire plus ou moins eloigné du point A selon que ie veux faire ces Ovales plus ou moins grandes, & de ce point F comme centre ie decris un cercle, qui passe quelque peu au delà du point A, comme par le point 5, puis de ce point 5 ie tire la ligne droite 56, qui coupe l'autre au point 6, en sorte que A6 soit moindre que A5, selon telle proportion donnée qu'on veut (...) Aprés cela ie prens aussi le point G, en la ligne FA, du costé ou est le point 5, a discretion, c'est a dire en faisant que les lignes AF&GA ont entre elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis ie fais RA egale à GA en la ligne A6, et du centre G descrivant un cercle, dont le rayon soit egale à R6, il couppe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui est l'un de ceux par ou doit passer la premiere des Ovales cherchée (...) et ainsi on en peut trouver autant d'autres [points] qu'on voudra, en tirant derechef d'autres lignes parallèles à 78 et d'autres cercle de centre F, & G.

(Descartes, *La Géométrie*, p.352, 353)

3.1.2 Construction génériques et specifiques

...ayant expliqué la façon de trouver une infinité de poins par ou elles [les courbes] passent, je pense avoir assés donné les moyens de les décrire. Mesme, il est a propos de remarquer qu il y a grande difference entre cete façon de trouver plusieurs poins pour tracer une ligne courbe, et celle dont on se sert pour la spirale, et ses semblables. Car par cete dernière on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être determinés par quelque mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer, et ainsi a proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est à dire pas un de ceux qui luy sont tellement propres qu'ils ne puissent etre trouvés que par elle.

(Descartes, *La Géométrie,* p. 339-340)

3.1.3 Construction de la quadratrice d'après Clavius

quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus BD in quotius partes aequales dividatur, & latus utrum AD, BC in totidem aequales partes. facillima divisio erit, si et arcus DB et utrumque latus AD, BC secetur primum bifariam, deinde utraque semissis iterum bifariam, etc., ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures existerint divisiones, eo accuratius linea describebitur...[9].

(Clavius, *Geometria Practica*, p. 321)

[9] Donc, on décrira la courbe quadratrice géométriquement de cette manière. L'arc BD soit divisé en tant de parties égales, et un de deux côtés AD, BC en autant de parties égales. Cette division sera très simple, si soit l'arc DB soit l'un de deux côtés AD, BC est premièrement bissecté, et ensuite, chaque partie est de nouveau bissectée, et ainsi de suite, autant que l'on voudra.

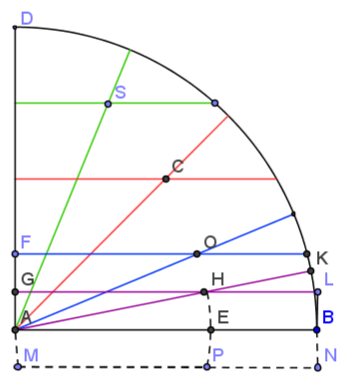


Fig.4

... sed quia punctum E, in latere AB, invenire geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: ut illud sine notabili errore, quiscilicet sub sensum cadat, reperiamur: utemur hoc artificio: Infimam partem AF, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continue, donec infima particula sit perexigua : Eodem modo infimam partem BI, arcus DB bifariam continue secabimus, donec tot fiant subdivisiones, quot in parte AF facta sunt, ut particula BK, talis pars sit totius arcus DB qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulae deinde AG, aequales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quae secet GL in H, puncto, quod accuratissime notetur (...) sumemus ipsi GH aequalem MP. Si enim quadratricem usque ad H, descriptam continuabimus aequabili, atque uniforme extensione usque ad P, secabit quadratrix linea latus AB, in E puncto, quod quaeritur.[10]

(Clavius, *Geometria Practica*, p.321-322).

[10]"...on le trouvera sans erreur remarquable, à savoir, sans erreur qui peut être perçu à travers les sens: on utilisera cette astuce: nous bissecterons AF, partie extrême du côté AD, continuellement (si elle n'est pas siffisammment petite), jusqu'à ce que son morceau ultime soit très petit: de même façon, nous bissecterons continuellement la partie extrême BI de l'arc DB, jusqu'à recouper tant de subdivisions quant il y en a dans la partie AF, de telle manière que la particule BK soit telle partie de tout l'arc DB comme AG est à tout le côté AD. On coupera ensuite les segments BL, BN, AM, égaux à la particule AG, et on tracera les droites auxiliaires GL, MN. Ayant tracé du centre A la droite auxiliaire [recta occulta] AK, qui coupe GL au point H, qui sera marqué très soigneusement, prenons GH égale à MP. Si on prolongera la quadratrice décrite jusqu'au point H, en l'étendant de manière semblable et uniforme jusqu'à P, la ligne quadratrice coupera le côté AB dansle point E, qui est cherché".

3.1.4 Descartesà Mersenne, 13 novembre 1629

> ... la ligne helice que vous ne m'avies point nommee & qui n'est pas une ligne plus receue en geometrie que celle qu'on appelle Quadratricem, pource qu'elle sert à carrer le cercle & mesme a diviser l'angle en toutes sortes de parties esgales, aussy bien que celle cy & a beaucoup d'autres usages que vous pourrés voir dans les Elemans d'Euclide commantés par Clavius. Car, encore qu'on puisse trouver une infinité de points par ou passe l'helice & la quadratrice; toutefois on ne peut pas trouver geometriquement aucun de poins qui sont necessaires pour les effaits desirés tant de l'une et tant de l'autre....
>
> (Descartes, AT vol. I, p.)

4 Conclusions

4.1 Critère de récévabilité des courbes

Une procédure de construction d'une courbe est exacte si:

- elle est une procédure à la règle et au compas,
- ou bien elle se fonde sur des sytèmes articulés et soumis à des mouvements, qui combinent deux segments et un cercle pour costruire de manière appropriée de nouvelles courbes non constructibles à la règle et au compas,
- elle se fonde sur des systèmes articulés et soumis à des mouvements qui combinent les courbes précédemment construites entre elles et avec cercles et segments.

4.2 Détermination exacte

Un objet est *déterminé par une procédure exacte* si:

- il s'agit d'une courbe engendrée par règle et compas reitéré;
- dans le cas d'un point appartenant à un lieu, s'il est construit par intersection entre deux courbes construites par règle et compas reitéré, à partir d'un point arbitrairement choisi sur une droite. Cette dernière condition est équivalente à la suivante: un point est déterminé exactement s'il peut être relié par une chaîne finie de constructions par règle et compas reitéré à un point arbitrairement choisi (comme dans l'exemple des ovales).

Sur la base de (i) et de (ii) on peut conclure que:

- si les points d'un lieu sont construits par une procédure point par point générique, alors ils sont détérminés exactement[11].

- Dans le fragment sur la quadrature du cercle, le point x qui donne le diamètre du cercle isopérimètre au carré donné n'est pas déterminé exactement par la procédure de bissection successive du segment EP et de l'angle PCF.

- Ni, par conséquent, le point d'intersection entre quadratrice et base dans la construction point par point donnée par Clavius sera déterminé exactement.

[11] "cette façon de tracer une ligne courbe en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'estend qu'a celles qui peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier et continu..." Descartes (1637), p.